ŞTEFAN I. MAKSAY DIANA A. BISTRIAN

INTRODUCERE IN METODA ELEMENTELOR FINITE

EDITURA CERMI IAŞI
2008

ŞTEFAN I. MAKSAY **DIANA A. BISTRIAN**

INTRODUCERE
ÎN
METODA ELEMENTELOR FINITE

EDITURA CERMI IAŞI

2008

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

MAKSAY, I. ŞTEFAN
Introducere in metoda elementelor finite / Ştefan I. Maksay, Diana A. Bistrian - Iaşi : Cermi, 2007
Bibliogr.
ISBN 978-973-667-324-5
I. BISTRIAN, A. DIANA

Consilier editorial:
Prof.univ.dr.ing. **Emanoil Bârsan**
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi
Referenți ştiințifici:
Prof.univ.dr.ing. **Adalbert Kovacs**
Universitatea "Politehnica" Timişoara

CERMI
CARTEA DE STIINTA
CERMI
Editură Tehnică, Ştiințifică şi Didactică
700141 Iaşi, Str. Curelari Nr. 16,
Tel. 0741099980, Fax. 0232316604
e-mail: EdituraCermi@hotmail.com,
Editura.Cermi@gmail.com
www.cermi.ro
www.cermi.ro/librarie

Acreditări:

Ministerul Culturii si Cultelor
Acreditată de M.C.C. cu avizul 3713 din 13 iunie 1995

CONSILIUL NATIONAL AL CERCETARII STIINTIFICE DIN INVATAMANTUL SUPERIOR
CNCSIS
Recunoscută de CNCSIS având codul nr. 181

apler
Membră Asociația Publicațiilor Literare şi Editurilor din România din anul 2000

Prefață

Prezenta carte, reprezentând o introducere în analiza cu elemente finite, este adresată în primul rând studenților masteranzi ai Facultății de Inginerie din Hunedoara, dar poate fi consultată şi de cursanții de la învățământul postuniversitar.

Sunt prezentate atât fundamentele teoretice ale Metodei Elementelor Finite cât şi exemplificări ale acestei metode la rezolvarea unor probleme de mecanică, hidrodinamică, probleme termice şi de elasticitate, etc.

Rezolvările analitice ale problemelor propuse sunt susținute de implementări numerice, fiind prezentate programe de calcul simple şi eficiente în MathCAD şi MATLAB.

Mulțumim referentului ştiințific care, prin observațiile şi sugestiile făcute, a contribuit la elaborarea prezentei cărți.

Autorii îşi exprimă, anticipat, gratitudinea pentru eventualul aport critic al cititorilor.

Hunedoara, Autorii

Mai, 2008

CUPRINS

CAPITOLUL I

NOȚIUNI INTRODUCTIVE

§1.1 INTRODUCERE ÎN ANALIZA CU ELEMENTE FINITE

Generalități

Bazele analizei cu elemente finite au fost pentru prima dată formulate în 1943 de către matematicianul german Richard Courant (1888-1972), care, îmbinând metoda Ritz cu analiza numerică în probleme de calcul variațional şi minimizare, a obținut soluții satisfăcătoare pentru analiza sistemelor cu vibrații.

Începând cu anii '70, metoda elementelor finite a fost folosită la rezolvarea celor mai complexe probleme din domeniul structurilor elastice continue, de la construcțiile civile, industriale sau de baraje până la construcțiile de nave maritime, respectiv cosmice.

Principiile metodei analizei cu elemente finite

Fenomenele fizice de acest fel sunt descrise din punct de vedere matematic de ***ecuații diferențiale***, prin a căror integrare, în condiții la limită date, se obține o soluție exactă a problemei. Această cale analitică are dezavantajul ca este aplicabilă numai în cazul problemelor relativ simple. Problemele care intervin în activitatea practică sunt de cele mai multe ori complexe în ce priveşte alcătuirea fizică şi geometrică a pieselor, condițiile de încărcare, condițiile la limită etc., astfel încât integrarea ecuațiilor diferențiale este dificilă sau chiar imposibilă.

În metoda elementului finit se utilizează, ca punct de plecare, un model integral al fenomenului studiat. El se aplică separat pentru o serie de mici regiuni ale unei structuri continue obținute prin procedeul discretizării, denumite ***elemente finite,*** legate între ele în puncte numite ***noduri***.

Aceste elemente finite trebuie astfel concepute încât ansamblul lor să reconstituie cât mai fidel posibil structura reală analizată. În principiu, aceste legături trebuie astfel concepute încât să permită o convergență numerică către soluția exactă, atunci când structura este discretizată în elemente finite cu dimensiuni din ce în ce mai reduse.

Etapele de rezolvare a unei probleme cu ajutorul metodei elementelor finite

Etapa 1. *Împărțirea domeniului de analiză în elemente finite.*

În această etapă analistul alege tipul sau tipurile de elemente finte adecvate problemei de rezolvat, apoi împarte structura în elemente finite. Această operație, care se numeşte şi *discretizare*, poate fi făcută cu ajutorul calculatorului. Tipul de element finit este definit de mai multe caracteristici, cum sunt numărul de dimensiuni (uni-, bi-, tridimensional), numărul de noduri ale elementului, funcțiile de aproximare asociate şi altele. Alegerea tipului de element finit are mare importanță pentru necesarul de memorie internă, pentru efortul de calcul impus calculatorului şi pentru calitatea rezultatelor.

Punctul de plecare pentru construcția matematică a diferitelor metode de elemente finite îl constituie respectarea următoarelor principii:

• utilizarea unei aproximări bazată pe folosirea de elemente mai simple, pentru care avem la dispoziție o soluție;

• sporirea exactității calculului prin rafinarea discretizării.

Etapa 2. *Constituirea ecuațiilor elementelor finite (ecuațiile elementale).*

Comportatea materialului sau mediului în cuprinsul unui element finit este descrisă de ecuațiile elementelor finte denumite şi *ecuații elementale.* Acestea alcătuiesc un sistem de ecuații al elementului.

Ecuațiile elementale pot fi deduse direct, pe cale variațională, prin metoda reziduală sau a reziduurilor (*Galerkin*) sau prin metoda bilanțului energetic.

Etapa 3. *Asamblarea ecuațiilor elementale în sistemul de ecuații al structurii.*

Comportarea întregii structurii este modelată prin asamblarea sistemelor de ecuații ale elementelor finte în sistemul de ecuații al structurii, ceea ce din punct de vedere fizic înseamnă că echilibrul structurii este condiționat de echilibrul elementelor finite. Prin asamblare se impune ca, în nodurile comune elementelor, funcția sau funcțiile necunoscute să aibă aceeaşi valoare.

Etapa 4. *Implementarea condițiilor la limită şi rezolvarea sistemului de ecuații al structurii.*

Sistemul de ecuații obținut în urma implementării condițiilor la limită corespunzătoare problemei concrete este rezolvat printr-unul din procedeele obişnuite, de exemplu prin eliminarea Gauss sau prin descompunerea Choleski, obținându-se valorile funcțiilor in noduri. Acestea se numesc şi *necunoscute primare sau de ordinul întâi.*

Etapa 5. *Efectuarea de calcule suplimentare pentru determinarea necunoscutelor secundare.*

În unele probleme, după aflarea necunoscutelor primare, analiza se încheie. Acesta este de obicei cazul problemelor de conducție termică, în care necunoscutele primare sunt temperaturi nodale. În alte probleme însă, cunoaşterea numai a necunoscutelor primare nu este suficientă, analiza trebuind să continuie cu determinarea *necunoscutelor secundare* sau de ordinul doi. Acestea sunt derivate de ordin superior ale necunoscutelor primare. Astfel, de exemplu, în problemele mecanice de elasticitate, necunoscutele primare sunt deplasările nodale. Cu ajutorul lor, în această etapă, se determină necunoscutele secundare care sunt deformațiile specifice şi tensiunile. Şi în cazul problemelor termice analiza poate continua cu determinarea necunoscutelor secundare care sunt intensitățile fluxurilor termice (gradienți termici).

§1.2 FUNCȚII DE FORMĂ

Funcțiile de interpolare care indică legea de variație asumată pentru mărimile necunoscute (deplasări, temperaturi, etc) la nivelul elementului finit, se numesc *funcții de formă*.

Pentru elementele finite cu două, trei, patru şi, respectiv, cinci noduri, expresiile funcțiilor de formă sunt următoarele

• Pentru elemente cu 2 noduri $(\xi = -1;\ \xi = 1)$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \Phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \tag{1}$$

În Figura 1a sunt reprezentate grafic funcțiile de formă în cazul unui element finit cu două noduri.

Funcțiile de formă au proprietățile:

$\Phi_1(-1) = 1$, $\Phi_1(1) = 0$,

$\Phi_2(-1) = 0$, $\Phi_2(1) = 1$.

Exemplu: Fie nodurile

ξ	-1	1
u	$u_1 = 2$	$u_2 = 5$

Funcția de interpolare între cele două noduri este

$$f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi) = 2\Phi_1(\xi) + 5\Phi_2(\xi),$$

fiind reprezentată grafic în Figura 1b.

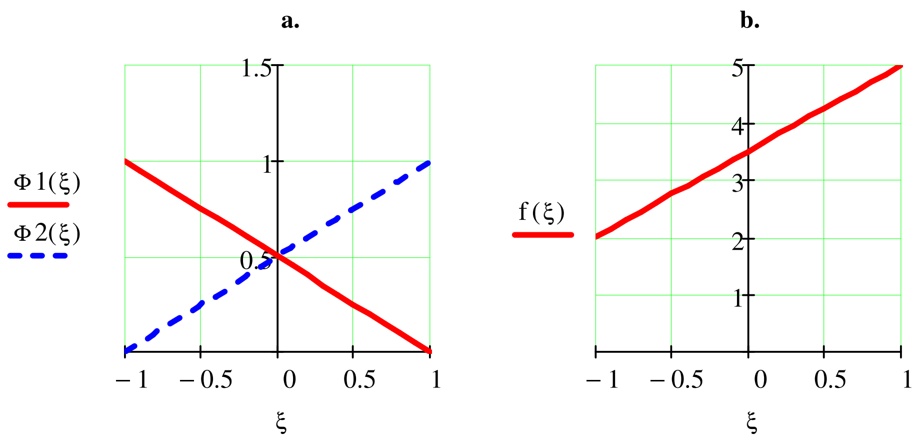


Figura 1 a. Funcțiile de formă pentru un element cu două noduri.

b. Funcția de interpolare $f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi)$.

• Pentru elemente cu 3 noduri $(\xi_1 = -1; \xi_2 = 0; \xi_3 = 1)$ funcțiile de formă sunt

$$\begin{cases} \Phi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \Phi_2 = (1-\xi)(1+\xi) \\ \Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{cases} \qquad (2)$$

fiind reprezentate grafic în Figura 2a.

Funcțiile de formă au proprietățile:

$\Phi_1(-1) = 1$, $\Phi_1(0) = 0$, $\Phi_1(1) = 0$,

$\Phi_2(-1) = 0$, $\Phi_2(0) = 1$, $\Phi_2(1) = 0$,

$\Phi_3(-1) = 0$, $\Phi_3(0) = 0$, $\Phi_3(1) = 1$.

Exemplu: Fie nodurile

ξ	-1	0	1
u	$u_1 = 2$	$u_2 = 5$	$u_3 = 4$

Funcția de interpolare între cele trei noduri este

$$f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi) + u_3 \cdot \Phi_3(\xi) =$$
$$= 2\Phi_1(\xi) + 5\Phi_2(\xi) + 4\Phi_3(\xi),$$

reprezentată grafic în Figura 2b.

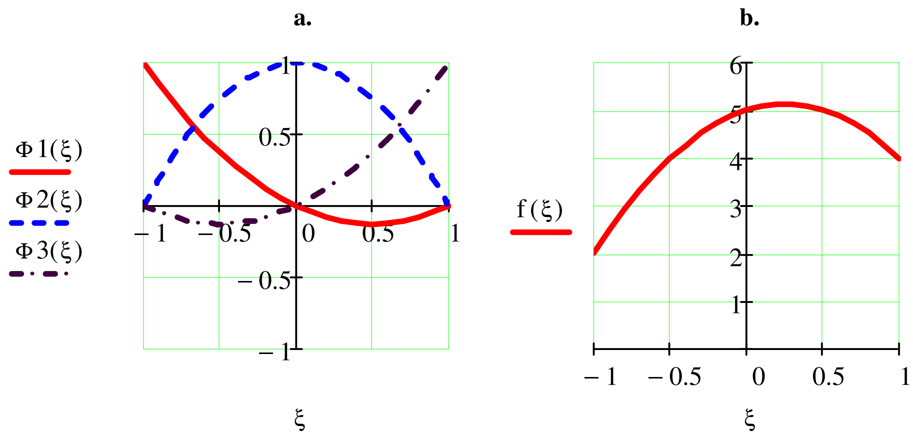


Figura 2 a. Funcţiile de formă pentru un element cu trei noduri.

b. Funcţia de interpolare $f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi) + u_3 \cdot \Phi_3(\xi)$.

- Pentru elemente cu 4 noduri $(\xi_1 = -1; \xi_2 = -1/3; \xi_3 = 1/3; \xi_4 = 1)$, funcţiile de formă au expresiile (Figura 3a)

$$\begin{cases} \Phi_1 = -\dfrac{9}{16}\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_2 = \dfrac{27}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_3 = \dfrac{27}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_4 = -\dfrac{9}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right) \end{cases} \tag{3}$$

şi proprietăţile

$$\Phi_1(-1) = 1,\ \Phi_1(-1/3) = 0,\ \Phi_1(1/3) = 0,\ \Phi_1(1) = 0,$$
$$\Phi_2(-1) = 0,\ \Phi_2(-1/3) = 1,\ \Phi_2(1/3) = 0,\ \Phi_2(1) = 0,$$

$$\Phi_3(-1)=0,\ \Phi_3(-1/3)=0,\ \Phi_3(1/3)=1,\ \Phi_3(1)=0,$$

$$\Phi_4(-1)=0,\ \Phi_4(-1/3)=0,\ \Phi_4(1/3)=0,\ \Phi_4(1)=1.$$

Exemplu: Fie nodurile

ξ	-1	$-1/3$	$1/3$	1
u	$u_1=2$	$u_2=5$	$u_3=3$	$u_4=4$

Funcția de interpolare între cele patru noduri este

$$f(\xi)=u_1\cdot\Phi_1(\xi)+u_2\cdot\Phi_2(\xi)+u_3\cdot\Phi_3(\xi)+u_4\cdot\Phi_4(\xi)=$$

$$=2\Phi_1(\xi)+5\Phi_2(\xi)+3\Phi_3(\xi)+4\Phi_4(\xi),$$

reprezentată grafic în Figura 3b.

a. **b.**

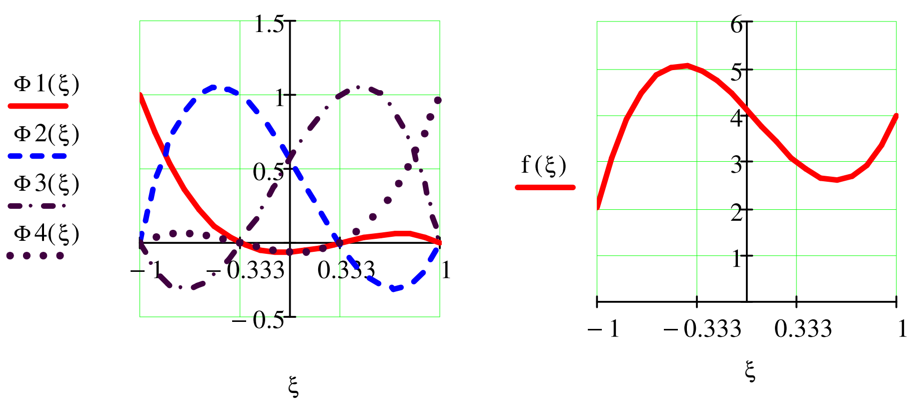


Figura 3 a. Funcțiile de formă pentru un element cu patru noduri.
b. Funcția de interpolare $f(\xi)=u_1\cdot\Phi_1(\xi)+u_2\cdot\Phi_2(\xi)+u_3\cdot\Phi_3(\xi)+u_4\cdot\Phi_4(\xi)$.

• Pentru elemente cu 5 noduri $(\xi_1=-1;\ \xi_2=-1/2;\ \xi_3=0;\ \xi_4=1/2;\ \xi_5=1)$, funcțiile de formă (Figura 4) se aleg astfel

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\xi\right)\xi\left(\dfrac{1}{2}-\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_2 = -\dfrac{8}{3}(1+\xi)\xi\left(\dfrac{1}{2}-\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_3 = 4(1+\xi)\left(\dfrac{1}{2}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{2}-\xi\right)(1-\xi) \\ \Phi_4 = \dfrac{8}{3}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{2}+\xi\right)\xi(1-\xi) \\ \Phi_5 = -\dfrac{2}{3}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{2}+\xi\right)\xi\left(\dfrac{1}{2}-\xi\right) \end{cases} \tag{4}$$

având proprietățile

$$\Phi_1(-1)=1,\ \Phi_1(-1/2)=0,\ \Phi_1(0)=0,\ \Phi_1(1/2)=0,\ \Phi_1(1)=0,$$
$$\Phi_2(-1)=0,\ \Phi_2(-1/2)=1,\ \Phi_2(0)=0,\ \Phi_2(1/2)=0,\ \Phi_2(1)=0,$$
$$\Phi_3(-1)=0,\ \Phi_3(-1/2)=0,\ \Phi_3(0)=1,\ \Phi_3(1/2)=0,\ \Phi_3(1)=0,$$
$$\Phi_4(-1)=0,\ \Phi_4(-1/2)=0,\ \Phi_4(0)=0,\ \Phi_4(1/2)=1,\ \Phi_4(1)=0,$$
$$\Phi_5(-1)=0,\ \Phi_5(-1/2)=0,\ \Phi_5(0)=0,\ \Phi_5(1/2)=0,\ \Phi_5(1)=1$$

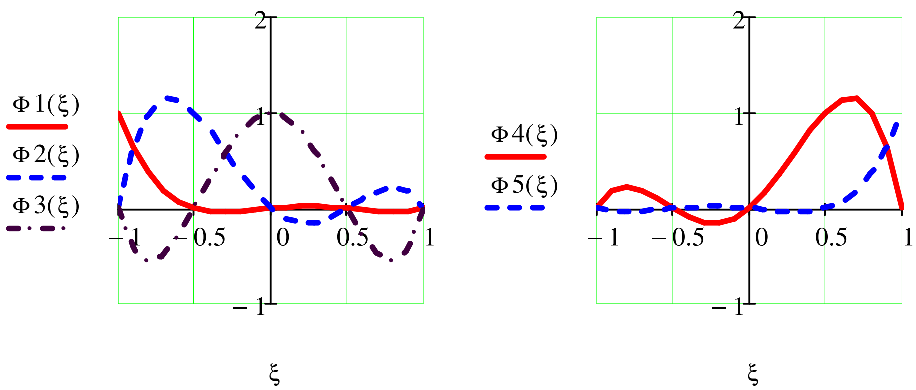


Figura 4. Funcțiile de formă pentru un element cu cinci noduri

Exemplu: Fie nodurile

ξ	-1	-0.5	0	0.5	1
u	$u_1 = 2$	$u_2 = 5$	$u_3 = 4$	$u_4 = 3$	$u_5 = 5$

Funcția de interpolare (Figura 5) între cele cinci noduri este

$$f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi) + u_3 \cdot \Phi_3(\xi) + u_4 \cdot \Phi_4(\xi) + u_5 \cdot \Phi_5(\xi).$$

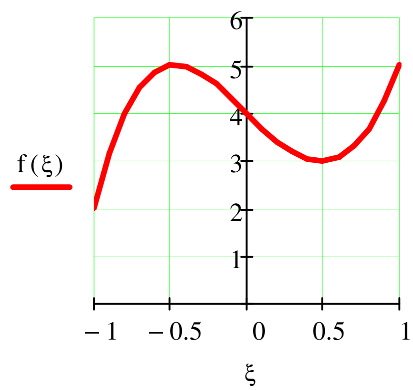


Figura 5. Funcția de interpolare
$f(\xi) = u_1 \cdot \Phi_1(\xi) + u_2 \cdot \Phi_2(\xi) + u_3 \cdot \Phi_3(\xi) + u_4 \cdot \Phi_4(\xi) + u_5 \cdot \Phi_5(\xi)$

Transformarea în coordonate naturale pentru elementul liniar cu 2 noduri se mai poate scrie cu ajutorul funcțiilor de interpolare (1) astfel

$$x = \frac{1}{2} x_k (1 - \xi) + \frac{1}{2} x_{k+1} (1 + \xi) = x_k \Phi_1(\xi) + x_{k+1} \Phi_2(\xi) \quad (5)$$

Ținând seama de proprietățile generale ale funcțiilor de interpolare, pentru un element liniar cu r noduri transformarea de coordonate (5) se scrie

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \Phi_i(\xi) \quad (6)$$

unde $\Phi_i(\xi)$ sunt funcțiile de interpolare Lagrange de grad $r - 1$, iar x_i punctele de bază sau nodurile elementului.

Diferențiind relația (6) se obține

$$dx = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{d\Phi_i}{d\xi} \right) d\xi = J \cdot d\xi \qquad (7)$$

unde J este jacobianul transformării de coordonate (6).

Să calculăm valoarea jacobianului.

-pentru elementul liniar cu două noduri (funcția de interpolare de gradul întâi)

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \; ; \; \Phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi);$$

$$x_1 = x_k \; ; \; x_2 = x_k + h$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} \; ; \; \frac{d\Phi_2}{d\xi} = \frac{1}{2} \qquad (8)$$

$$J = \sum_{i=1}^{2} x_i \frac{d\Phi_i}{d\xi} = -\frac{1}{2} x_k + \frac{1}{2}(x_k + h) = \frac{h}{2}.$$

-pentru elementul liniar cu trei noduri (funcția de interpolare de gradul doi)

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi); \; \Phi_2 = (1-\xi)(1+\xi); \; \Phi_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

$$x_1 = x_k \; ; \; x_2 = x_k + \frac{h}{2}; \; x_3 = x_k + h \qquad (9)$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} + \xi \; ; \; \frac{d\Phi_2}{d\xi} = -2\xi \; ; \; \frac{d\Phi_3}{d\xi} = \frac{1}{2} + \xi$$

$$\Rightarrow J = x_k\left(-\frac{1}{2} + \xi\right) + \left(x_k + \frac{h}{2}\right)(-2\xi) + (x_k + h)\left(\frac{1}{2} + \xi\right) = \frac{h}{2}.$$

-pentru elementul liniar cu patru noduri (funcția de interpolare de gradul trei), prin derivarea funcțiilor de formă în raport cu variabila ξ, se obțin expresiile

$$\begin{cases}\Phi_1=-\dfrac{9}{16}\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)(1-\xi)\\ \Phi_2=\dfrac{27}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)(1-\xi)\\ \Phi_3=\dfrac{27}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)(1-\xi)\\ \Phi_4=-\dfrac{9}{16}(1+\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d\Phi_1}{d\xi}=-\dfrac{9}{16}\left(3\xi^2-2\xi-\dfrac{1}{9}\right)\\ \dfrac{d\Phi_2}{d\xi}=\dfrac{27}{16}\left(3\xi^2-\dfrac{2}{3}\xi-1\right)\\ \dfrac{d\Phi_3}{d\xi}=\dfrac{27}{16}\left(-3\xi^2-\dfrac{2}{3}\xi+1\right)\\ \dfrac{d\Phi_4}{d\xi}=-\dfrac{9}{16}\left(-3\xi^2-2\xi+\dfrac{1}{9}\right)\end{cases}\tag{10}$$

$$x_1=x_k\,;\ x_2=x_k+\frac{h}{3}\,;\ x_3=x_k+\frac{2h}{3}\,;\ x_4=x_k+h$$

$$J=-\frac{9}{16}\left(3\xi^2-2\xi-\frac{1}{9}\right)x_k+\frac{27}{16}\left(3\xi^2-\frac{2}{3}\xi-1\right)\left(x_k+\frac{h}{3}\right)+$$

$$+\frac{27}{16}\left(-3\xi^2-\frac{2}{3}\xi+1\right)\left(x_k+\frac{2h}{3}\right)-\frac{9}{16}\left(-3\xi^2-2\xi+\frac{1}{9}\right)(x_k+h)=\frac{h}{2}.$$

Se consideră $\hat{u}=\hat{u}(x)$ soluţia aproximativă a formei variaţionale care se scrie cu ajutorul unui set de funcţii de aproximare $\Psi_i=\Psi_i(x)$ având gradul $s-1$

$$\hat{u}(x)=\sum_{i=1}^{s}C_i\Psi_i(x)\,.\tag{11}$$

Aşa cum rezultă din exemplele prezentate anterior, se deduce soluţia $\hat{u}(x)$ cu ajutorul *funcţiilor de interpolare* prin nodurile elementului $\Phi_i=\Phi_i(x)$ având gradul $r-1$, unde r reprezintă numărul gradelor de libertate corespunzătoare numărului de noduri ale elementului

$$\hat{u}(x)=\sum_{i=1}^{r}x_i\Phi_i(x).\tag{12}$$

În general, gradul funcţiilor de aproximare $s-1$ poate să difere de gradul funcţiei de interpolare $r-1$.

§1.3 TEOREME ENERGETICE

În scopul deducerii ecuației elementelor finite, se folosesc în mod curent procedee ***energetice*** sau ***reziduale.***

Exemplificam aceste procedee în cazul mecanicii solidului deformabil, în care trecerea structurii de la o stare de echilibru la alta se numeşte ***deformație.*** Prin deformație punctele de aplicație a forțelor care acționează asupra structurii se deplasează, producând lucru mecanic. Procesul deformației este guvernat de relația

$$dW = dL \qquad (1)$$

unde

dW este energia internă totală,

dL este lucrul mecanic elementar exterior.

Se poate considera că tot lucrul mecanic exterior de defomare se transformă în energie potențială de deformare.

Lucrul mecanic exterior

Sarcinile exterioare care încarcă structura şi generează lucrul mecanic pot fi

- forțe concentate: $\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T$,
- forțe distribuite pe suprafață: $\{p\} = \{p_x \ p_y \ p_z\}^T$,
- forțe masice distribuite în volumul V: $\{g\} = \{g_x \ g_y \ g_z\}^T$.

Admițând o creştere liniară a sarcinilor, cu deplasările punctelor de aplicație ale acestora $\{\delta\} = \{u \ v \ w\}^T$, expresia *lucrului mecanic exterior* este

$$L = \int_A \{\delta\}^T \cdot \{p\} dA + \int_V \{\delta\}^T \cdot \{g\} dv + \{\delta\}^T \cdot \{F\}. \qquad (2)$$

Energia potențială de deformare

Energia potențială de deformare specifică, în cazul structurilor cu stări de tensiune unidimensională cu comportare liniară, are expresia

$$W_1 = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$$

şi reprezintă energia acumulată de unitatea de volum în urma deformării.

Volumul elementar dv al unei structuri spațiale acumulează energia potențială de deformare dată de relația

$$dW = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T \cdot \{\varepsilon\}dv = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\}dv = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T \cdot E \cdot \{\varepsilon\}dv\,. \quad (3)$$

În situația în care există stări inițiale de tensiune $\{\sigma_0\}$ şi stări inițiale de deformare $\{\varepsilon_0\}$, se utilizează relația

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T E \cdot \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} - \{\varepsilon\}^T E \cdot \{\varepsilon_0\} \right) dv\,. \qquad (4)$$

Principiul lucrului mecanic virtual (deplasărilor virtuale)

Deplasarea virtuală este deplasarea cu valoare foarte mică, cu direcția şi sensul arbitrare. Totalitatea deplasărilor virtuale continue, care satisfac condițiile limită geometrice, formează câmpul deplasărilor geometrice admisibile.

Sintetic, principiul lucrului mecanic virtual se exprimă astfel: *pentru un corp deformabil încărcat exterior, şi cu anumite condiții de frontieră (limită), lucrul mecanic virtual al încărcărilor exterioare este egal cu lucrul mecanic virtual interior (energia de deformare), pentru orice câmp de deplasări virtuale, geometric admisibile.*

Principiul exprimă legătura existentă dintre solicitări şi forțele interioare pentru asigurarea unui echilibru stabil, respectiv corelațiile dintre deplasările nodurilor şi deformațiile corespunzătoare ale corpului pentru a satisface condițiile de compatibilitate.

Forma sintetică a acestui principiu este

$$dL^{\bullet} = dW^{\bullet},$$

sau după înlocuire

$$\int_A \{\delta^{\bullet}\}\cdot\{p\}dA + \int_V \{\delta^{\bullet}\}^T\cdot\{g\}dv + \{\delta^{\bullet}\}^T\{F\} = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon^{\bullet}\}^T\cdot\{\sigma\}dv\,. \quad (5)$$

<u>Teorema</u> <u>energiei</u> <u>potențiale</u>

Potențialul total (energia potențială totală) Π al unui sistem elastic deformabil se obține însumând energia potențială de deformare W şi energia potențială a forțelor exterioare W_p. Între lucrul mecanic al forțelor exterioare L şi energia W_p al acestora există relația

$$L = -W_p\,.$$

Astfel, expresia potențialului total, Π este

$$\Pi = W - L \quad (6)$$

unde

Π este o funcțională în sens matematic (funcție de alte funcții);

W este energia potențială de deformare elastică;

L este lucrul mecanic al forțelor exterioare.

Ținând cont de expresiile energiei de deformare şi a lucrului mecanic exterior relația (6) devine:

$$\Pi = \int_V\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T E\cdot\{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T\{\sigma_0\} - \{\varepsilon\}^T E\cdot\{\varepsilon_0\}\right)dv -$$

$$-\int_A \{\delta\}^T\{p\}dA - \int_V \{\delta\}^T\{g\}dv - \{\delta\}^T\{F\}\,. \quad (7)$$

Teorema energiei potențiale minime se poate enunța astfel: *dintre toate câmpurile deplasărilor geometric admisibile ale unei structuri stabile care respectă condițiile limită, numai cele pentru care energia potențială are o valoare staționară (minimă) corespund poziției de echilibru.*

Pentru întreaga structură *energia potențială* sau *potențialul* este suma potențialelor elementlor finite. În cazul unei structuri divizate în n elemente finite

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \,. \tag{8}$$

§1.4 METODE NUMERICE PENTRU ANALIZA CU ELEMENTE FINITE

Dintre metodele numerice eficiente în analiza cu elemente finite, vom prezenta în cele ce urmează metoda Ritz şi metoda Galerkin, exemplificate prin programe realizate în MathCAD şi MATLAB.

Metoda Ritz

În 1908, W. Ritz a propus o metodă simplă şi efectivă pentru rezolvarea problemelor la limită, având o formulare variațională. Se ştie că rezolvarea unei ecuații diferențiale într-un anumit domeniu şi satisfacând anumite condiții la limită este echivalentă cu găsirea minimului unei anumite funcționale corespunzătoare, exprimată cu ajutorul unei integrale unidimensionale sau printr-o integrală multiplă.

De exemplu, minimizarea funcționalei

$$\int_a^b F\left(x, y, \frac{d}{dx}y\right)dx \tag{1}$$

constă în a determina o soluție aproximativă a problemei variaționale de forma

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\,, \tag{2}$$

funcțiile care apar satisfăcând condițiile la limită impuse.

Specific pentru metoda elementelor finite este faptul că minimizarea se face pe subdomenii ale domeniului studiat, denumite ***elemente finite***, legate între ele în puncte numite ***noduri***. Ca urmare a minimizării funcționalei în toate elementele finite în care a fost împărțit domeniul şi asamblării pe tot domeniul a efectelor obținute pe elementele finite, rezultă un sistem de ecuații algebrice prin a cărui rezolvare se determină valorile funcției studiate în noduri. În scopul minimizării funcționalei pe elementele finite ale domeniului analizat, funcția sau funcțiile necunoscute, continue pe tot domeniul, sunt aproximate printr-un set de funcții convenționale, continue numai pe cuprinsul elementelor finite.

În cazul condițiilor omogene $y(0)=0$, $y(1)=0$, funcțiile coordonate $\varphi_k(x)$ pot avea, de exemplu, forma

$$\varphi_k(x) = (1-x)x^k$$

sau

$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi x).$$

Exemplu. Să se determine minimul funcționalei

$$I(y) = \int_0^1 \left[(y'(x))^2 + y(x)^2 + y(x)\right] dx$$

în mulțimea funcțiilor polinomiale de gradul 2 care se anulează în x = 0 şi x = 1.

Rezolvare analitică

Datorită condițiilor la limită, pentru aplicarea metodei lui Ritz vom considera familia de funcții

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k (1-x), \tag{3}$$

unde $\varphi_k(x) = x^k(1-x)$, $k = 1,2,....,n$, reprezintă un sistem complet de funcții care verifică condițiile la limită impuse.

Scriind că funcția y_n realizează minimul funcționalei,

$$I(c_1, c_{2,}....., c_n) = \int_0^1 \left[(y_n'(x))^2 + (y_n(x))^2 + y_n(x) \right] dx\,,$$

vom obține pentru constantele c_k, $k = 1,2,...,n$, sistemul de ecuații

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0, \; k = \overline{1,n}, \tag{4}$$

adică

$$\int_0^1 \left[2y_n' \cdot \frac{\partial y_n'}{\partial c_k} + 2y_n \cdot \frac{\partial y_n}{\partial c_k} + \frac{\partial y_n}{\partial c_k} \right] dx = 0. \tag{5}$$

Ținând seama de (3) calculăm

$$\begin{gathered} y_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}[k(1-x)-x] \\ \frac{\partial y_n'}{\partial c_k} = x^{k-1}[k(1-x)-x] \quad , \quad \frac{\partial y_n}{\partial c_k} = x^k(1-x) \end{gathered} \tag{6}$$

Pentru $n = 1$ avem $y_1(x) = c_1 x(1-x)$ şi substituind această expresie în relația (5) rezultă

$$\int_0^1 \left[2c_1(1-2x)^2 + 2c_1 x^2 (1-x)^2 + x(1-x) \right] dx = 0, \tag{7}$$

de unde se obține coeficientul $c_1 = -0.228$.

Aproximanta de ordinul unu are expresia $y_1(x) = -0.228x(1-x)$.

Rezolvare numerică în MathCAD

Următorul program găseşte aproximanta de ordinul unu a funcției care minimizează funcționala $\int_0^1 \left[(y'(x))^2 + y(x)^2 + y(x) \right] dx$.

ORIGIN ≡ 1

Se alege funcția:

$y(x) := x \cdot (1-x)$

li , ls = capetele intervalului de căutare

n = numărul de rulări

eps = precizia

```
ritz(li, ls, n, eps) := | while |li − ls| > eps
                        |   | for i ∈ 1 .. n
                        |   |   | ck_i ← li + ((ls − li)/(n − 1)) · (i − 1)
                        |   |   | x ← 0, 0.001 .. 1
                        |   |   | int_i ← [ ∫_0^1 [d/dx(ck_i · y(x))]^2 + (ck_i · y(x))^2 + ck_i · y(x) dx ]
                        |   | minim_int ← 10^8
                        |   | for index ∈ 1 .. n
                        |   |   if int_index < minim_int
                        |   |     | minim_int ← int_index
                        |   |     | poz_min ← index
                        |   | li ← ck_(poz_min−1)   if poz_min > 1
                        |   | li ← ck_1   if poz_min = 1
                        |   | ls ← ck_(poz_min+1)   if poz_min < n
                        |   | ls ← ck_n   if poz_min = n
                        | (ck  int  minim_int  poz_min)
```

Valorile constantei

$ck := ritz\left(-0.5,\ 0.5,\ 10,\ 10^{-5}\right)_{1,1}$

ck =

	1
1	-0.227292190269266
2	-0.227289216755906
3	-0.227286243242546
4	-0.227283269729186
5	-0.227280296215826
6	-0.227277322702466
7	-0.227274349189106
8	-0.227271375675745
9	-0.227268402162385
10	-0.227265428649025

Valorile funcționalei

$func := ritz\left(-0.5,\ 0.5,\ 10,\ 10^{-5}\right)_{1,2}$

func =

	1
1	-0.018939393800498
2	-0.018939393839696
3	-0.018939393872411
4	-0.018939393898641
5	-0.018939393918388
6	-0.018939393931651
7	-0.018939393938429
8	-0.018939393938724
9	-0.018939393932535
10	-0.018939393919862

Minimul funcționalei

$$\mathtt{minim} := \mathtt{ritz}\left(-0.5\,,\ 0.5\,,\ 10\,,\ 10^{-5}\right)_{1\,,\,3}$$

$$\mathtt{minim} = -0.018939393938724$$

Poziția minimului

$$\mathtt{poz\_minim} := \mathtt{ritz}\left(-0.5\,,\ 0.5\,,\ 10\,,\ 10^{-5}\right)_{1\,,\,4}$$

$$\mathtt{poz\_minim} = 8$$

Valoarea constantei care realizează minimul

$$\mathtt{ck\_fin} := \mathtt{ck}_{\mathtt{poz\_minim}}$$

$$\mathtt{ck\_fin} = -0.227271375675745$$

Metoda Galerkin

Metoda Galerkin este bazată pe formula reziduului ponderat. Pentru prezentarea metodei vom utiliza, de data aceasta, notațiile sintetice

$$Au = f \;\;,\;\; \text{în } \Omega \qquad (8)$$

$$Bu\,|_{\partial\Omega} = 0$$

unde A este un operator diferențial liniar, iar B este operator frontieră.

Pentru determinarea soluției aproximative a ecuației, necunoscuta u se aproximează cu o combinație de funcții de încercare

$$U(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \Phi_j(x) \qquad (9)$$

ai cărei coeficienți a_j se deduc din sistemul

$$\int_{\Omega} v_i^T (Au - f)\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \overline{v}_i^T Bu\, d\sigma = 0 . \qquad (10)$$

Aici v_i şi $\overline{v_i}$ sunt funcții test convenabil alese, cum ar fi $v_i = \overline{v_i} = \Phi_i$.

Astfel de soluții aproximative au fost considerate de matematicianul B. G. Galerkin (1878-1945). Facem observația că sistemul (10) se poate utiliza chiar dacă operatorul A este neliniar.

O realizare efectivă a metodei elementului finit se obține din schema de mai sus alegând funcțiile Φ_i şi v din subspațiul V al lui

$$V = \left\{ U \in H^1(0,1) \,\middle|\, u(0) = 0 \right\}$$

construit din funcții segmentar liniare.

Fie grila (diviziunea)

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1,$$

care divide Ω în elementele $e_j = (x_{j-1}, x_j)$ de lungimi h_j şi fie $h = \max h_j$. Vom impune ca elementele U ale lui V să fie continue pe $[0, 1]$, liniare pe fiecare element e_j şi $U(0) = 0$.

Funcțiile $U \in V$ pot fi descrise prin valorile lor u_j pe noduri. Avem

$$U(x) = a_1\Phi_1(x) + ...a_n\Phi_n(x), \tag{11}$$

unde

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & x = x_k \neq x_j \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{h_j}, & x \in (x_{j-1}, x_j) \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}, & x \in (x_j, x_{j+1}) \\ 0, & x \in e_k, k \neq j, j+1 \end{cases} \tag{12}$$

Deci funcțiile de bază Φ_j iau valoarea 1 pe nodul corespunzător x_j, valoarea 0 pe celelalte noduri şi sunt segmentar liniare pe fiecare interval e_k . Evident, $U(x_j) = a_j$ pentru fiecare $j = 1,...,n$.

Practic, metoda clasică Galerkin de tip element finit poate fi formulată în felul următor:

Să se găsească $U \in V$ astfel încât

$$\int_0^1 (U' - f) v_h \, dx = 0, \ \forall \, v_h \in V . \qquad (13)$$

Cum $U(x)$ are forma (11), alegând în $v_h = \Phi_i$ pentru $i = 1,...,n$, se obține sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \Phi_j'(x) \Phi_i(x) a_j dx = \int_0^1 f(x) \Phi_i(x) dx , \quad i = 1,...,n \ (14)$$

sau scris matriceal

$$[K][A] = [F] . \qquad (15)$$

Elementele K_{ij} ale matricii $[K]$ pot fi uşor calculate (în cazul general ele se calculează asamblând valorile de pe fiecare element).

Se obțin coeficienții

$$K_{ii} = (\Phi_i', \Phi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} \cdot \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} dx = 0 ,$$

şi

$$K_{nn} = (\Phi_n', \Phi_n) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{h_n} \cdot \frac{x - x_{n-1}}{h_n} dx = \frac{1}{2} .$$

În plus, pentru $i = 1,...,n-1$ avem

$$K_{i-1,i} = (\Phi_{i-1}', \Phi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h_i} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h_i} dx = \frac{-1}{2} ,$$

$$K_{i+1,i}=\left(\Phi'_{i+1},\,\Phi_i\right)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{h_{i+1}}\cdot\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}\,dx=\frac{1}{2}.$$

Matricea $[K]$ are în final forma

$$[K]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

În ceea ce priveşte calculul lui $[F]$, cu ajutorul unor formule de cuadratură simple (de exemplu formula trapezului), se obține pentru $i=1,\dots,n-1$

$$F_i=\left(f,\Phi_i\right)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\frac{x-x_{i-1}}{h_i}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}dx\cong\frac{f_ih_i}{2}+\frac{f_ih_{i+1}}{2}$$

şi

$$F_n=\left(f,\Phi_n\right)=\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)\frac{x-x_{n+1}}{h_n}dx\cong\frac{f_nh_n}{2}$$

de unde, dacă alegem o grilă uniformă $h_i=h=\dfrac{1}{n}$, $[F]$ respectiv sistemul (15), devin

$$[F]=h\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_{n-1}\\ f_n/2\end{pmatrix};\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=h\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ \vdots\\ f_{n-1}\\ f_n/2\end{pmatrix}.\quad (16)$$

Metoda lui Galerkin este absolut generală. Ea se poate aplica cu succes la ecuații de tipuri diferite: eliptice, hiperbolice, parabolice, chiar dacă ele nu sunt legate de probleme variaționale, ceea ce reprezintă un avantaj față de metoda lui Ritz. Totuşi, pentru aplicații legate de probleme variaționale, ea se găsește într-o interdependență strânsă cu metoda lui Ritz, iar în multe cazuri este echivalentă cu aceasta din urmă, în sensul că ambele conduc la aceeaşi soluție aproximativă.

În continuare, prezentăm câteva exemple.

Exemplul 1. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$u'=1\,,\quad x\in[0,1],$$

care satisface condiția inițială $u(0)=0$.

Rezolvare analitică

Consideram $n=3$ şi diviziunile echidistante $0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1$. Funcțiile de bază sunt

$$\Phi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\frac{1}{3}}, & x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{\frac{2}{3}-x}{\frac{1}{3}}, & x\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\\[2mm] 0, & x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases},\quad \Phi_2(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}, & x\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{1-x}{1-\frac{2}{3}}, & x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases},\quad \Phi_3(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{x-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}, & x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases}$$

Formăm soluția aproximativă de forma

$$u_{aprox}=a_1\Phi_1(x)+a_2\Phi_2(x)+a_3\Phi_3(x)\,.$$

Constantele a_i se determina din sistemul

$$[K][A]=[F],$$

unde

$$[K]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad [F]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1/2\end{pmatrix},$$

în forma

$$[A]=[K]^{-1}\cdot[F]\ ,\qquad [A]=\begin{pmatrix}0.333\\ 0.667\\ 1\end{pmatrix}.$$

După efecturea înlocuirilor rezultă

$$a_1\Phi_1(x)+a_2\Phi_2(x)+a_3\Phi_3(x)=x\ ,$$

pentru orice $x\in[0,1]$.

Exemplul 2. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$\frac{du}{dx}=2x\ ,\quad x\in[0,1],$$

care satisface condiția inițială $u(0)=0$.

Rezolvare numerică în MATLAB

```
clc,clear,format short
disp('       METODA GALERKIN'),disp('  '),
disp('       du(x)/dx=2*x,  0<=x<=1,  u(0)=0'),disp('  '),
n=5,disp('  '),M=zeros(n);h=1/n;M(n,n)=1;
hf=figure; for i=1:hf, close (i), end,
for i=1:n,x(i)=i/n;f(i)=2*x(i);end
for i=1:(n-1),M(i,i+1)=1;M(i+1,i)=-1;end,
T=zeros(n,1);for i=1:(n-1),T(i)=f(i);end,
T(n)=f(n)/2;
u=2*h*inv(M)*T;M,disp('  '),T,disp('  '),
disp('        x          u   ')
[x',u]
h=figure;plot(x,u,x,x.*x,'--','linewidth',2.5),grid on
legend('Solutia aproximativa','Solutia analitica');
```

Rezultate

METODA GALERKIN

du(x)/dx=2*x,   0<=x<=1,   u(0)=0

n =
    5

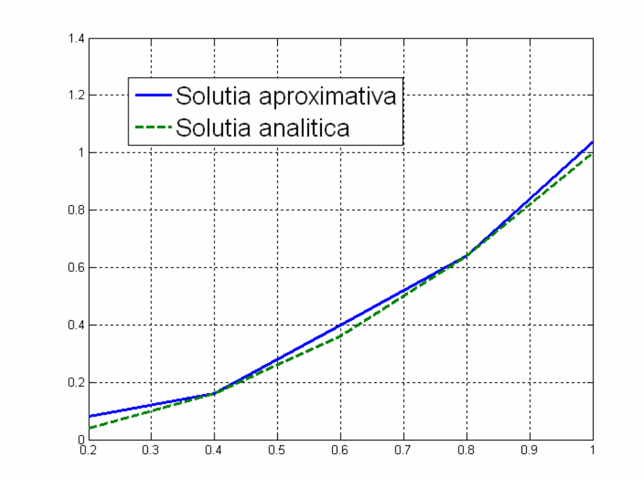
M =

0	1	0	0	0
-1	0	1	0	0
0	-1	0	1	0
0	0	-1	0	1
0	0	0	-1	1

T =
   0.4000
   0.8000
   1.2000
   1.6000
   1.0000

x	u
ans =	
0.2000	0.0800
0.4000	0.1600
0.6000	0.4000
0.8000	0.6400
1.0000	1.0400

\>>



Exemplul 3. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,1],$$

care satisface condiția inițială $u(0) = 0$.

Rezolvare numerică în MATLAB

```
clc,clear,disp('  '),
disp('       METODA GALERKIN'),disp('  '),
disp('       du(x)/dx=1/(1+x^2),  0<=x<=1,  u(0)=0')
disp('  '),n=3,
M=zeros(n);h=1/n;M(n,n)=1;
hf=figure; for i=1:hf, close (i), end,
for i=1:n,x(i)=i/n;f(i)=1/(1+x(i)^2);end,disp('  '),
for i=1:(n-1),M(i,i+1)=1;M(i+1,i)=-1;end,M,
T=zeros(n,1);for i=1:(n-1),T(i)=f(i);end,
```

```
T(n)=f(n)/2;disp('  '),T,disp('  '),
u=2*h*inv(M)*T;
disp('          x         u           atan(x)'),
[x',u,atan(x)']
h=figure;plot(x,u,x,atan(x),'--','linewidth',2.5),grid on
legend('Solutia aproximativa','Solutia analitica');
```

Rezultate

METODA GALERKIN

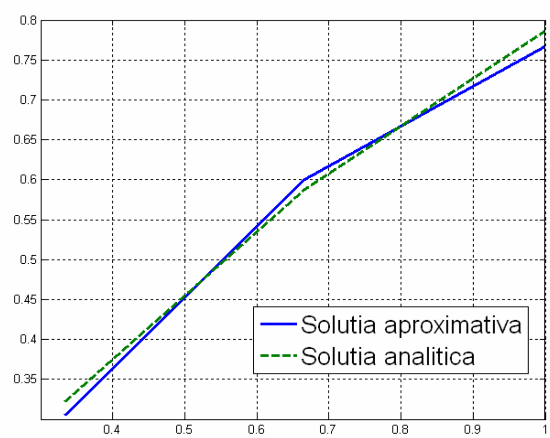
du(x)/dx=1/(1+x^2), 0<=x<=1, u(0)=0

```
n =
   3

M =
   0   1   0
  -1   0   1
   0  -1   1

T =
  0.9000
  0.6923
  0.2500

       x         u        atan(x)
ans =
  0.3333    0.3051    0.3218
  0.6667    0.6000    0.5880
  1.0000    0.7667    0.7854
>>
```



CAPITOLUL II

MODELAREA UNOR PROBLEME PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE

§2.1 SISTEME MECANICE CU RESORTURI

Se consideră un sistem mecanic simplu, format din resorturi coliniare, care se află sub influența unor forțe exterioare acționând pe direcția sistemului de resorturi. Utilizând metoda elementelor finite, ne propunem să determinăm distribuția deplasărilor în sistemul de resorturi şi reacțiunile în pereți. Pentru exemplificarea acestei probleme se consideră că sistemul este format din patru resorturi, de caracteristici k_i, $i = 1...4$, şi este sub acțiunea forțelor externe $F_2 = P$, $F_3 = Q$ şi $F_4 = R$ (Figura 1a).

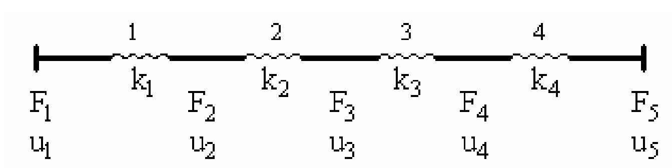


Figura 1a. Sistemul fizic dat.

Pentru a calcula deplasările capetelor libere ale resorturilor (u_2, u_3 şi u_4) şi reacțiunile provocate de reazeme (F_1 şi F_5) se consideră modelul analitic, constituit din

1. Ecuația de echilibru $\quad F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$, (1)
2. Ecuația constitutivă $\quad F = k \cdot u$, (2)
3. Condiții de limită $\quad u_1 = 0 \quad ; \quad u_5 = 0$. (3)

Vom considera un element finit generic (Figura 1b).

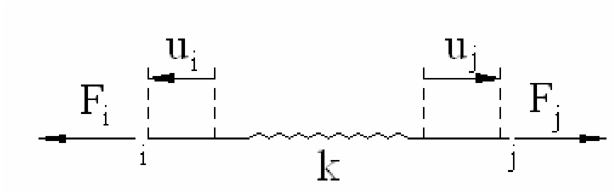


Figura 1b. Element finit generic.

Sistemul dat se descompune în elemente individuale, numite simbolic elemente finite. Fiecare element se caracterizează prin prezența unui resort cu un coeficient de proporționalitate k şi a două noduri marginale (i, j). Pentru fiecare nod se notează variabilele problemei, adică forțele nodale F_i, F_j şi deplasările u_i şi u_j (Figura 1b). Pentru obținerea modelului elemental de comportare se consideră că deplasările finale ale nodurilor i şi j ale elementului generic se pot obține prin procedeul de suprapunere a efectelor.

Principiul suprapunerii efectelor

Cazul a. Se consideră nodul i liber, iar nodul j fixat (Figura 2a).

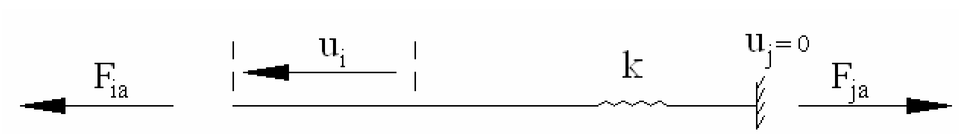


Figura 2a. Nodul i este liber.

Fie forța F_{ia}, care acționând asupra acestui element produce o deplasare a nodului i egală cu u_i şi, deoarece nodul j este fixat, deplasarea $u_j = 0$. Aplicând ecuațiile (1) şi (2) pentru acest caz, rezultă

$$F_{ia} + F_{ja} = 0, \tag{4}$$

$$F_{ia} = k\,u_i, \tag{5}$$

$$F_{ja} = -F_{ia} = -k\,u_i\,. \tag{6}$$

Cazul b. Se consideră nodul i fixat (deci $u_i = 0$) şi nodul j liber (Figura 2b).

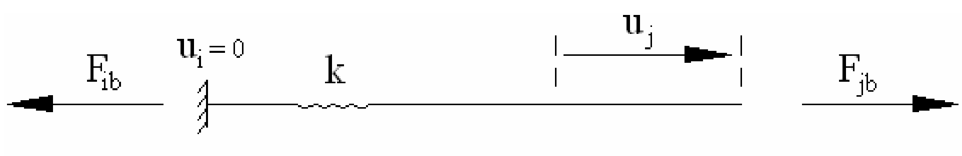


Figura 2b. Nodul j este liber.

Fie forța F_{jb} , astfel încât să producă deplasarea nodului j egală cu u_j . Rezultă relațiile

$$F_{ib} + F_{jb} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{ib} = -F_{jb}\,, \tag{7}$$

$$F_{jb} = k\,u_j\,, \tag{8}$$

$$F_{ib} = -k\,u_j\,. \tag{9}$$

Cazul c. Se suprapun cele două cazuri precedente, astfel încât să se obțină situația caracterizată prin forțele F_i, F_j şi deplasările u_i, u_j (Figura 2c.).

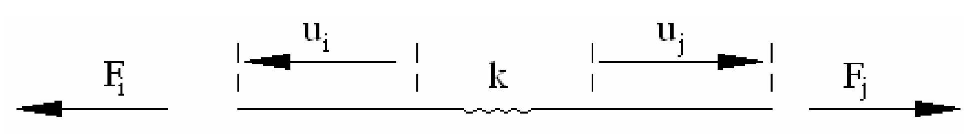


Figura 2c. Ambele noduri sunt libere.

Din relațiile (5), (6) şi (8), (9) rezultă sistemul

$$\begin{cases} F_i = F_{ia} + F_{ib} = k\,u_i - k\,u_j \\ F_j = F_{ja} + F_{jb} = -k\,u_i + k\,u_j \end{cases}, \tag{10}$$

adică

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}, \tag{11}$$

şi care reprezintă relaţia forţe-deplasări nodale. Aceasta se poate scrie sub forma

$$k^{<e>} \cdot u^{<e>} = F^{<e>}, \tag{12}$$

cu notaţiile

$$k^{<e>} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad u^{<e>} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}, \quad F^{<e>} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix},$$

unde $k^{<e>}$ reprezintă matricea proprietăţilor caracteristice ale elementului finit e, $u^{<e>}$ reprezintă vectorul valorilor nodale ale deplasărilor, iar $F^{<e>}$ este vectorul forţelor aplicate la nodurile elementului. Ecuaţia (12) constituie modelul elemental de comportare al sistemul dat. Particularizând acest model pentru fiecare element finit în parte şi raportând la întreaga configuraţie nodală a sistemului, se poate genera întreaga structură funcţională a sistemului mecanic considerat, sau a altor sisteme similare.

În cazul sistemului considerat, se scriu pentru fiecare resort ecuaţiile elementale şi se expandează (adică se raportează la sistemul global de noduri).

Elementul 1

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2^1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Elementul 2

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Elementul 3

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3^3 \\ u_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3^3 \\ F_4^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^3 \\ F_4^3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Elementul 4

$$\begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4^4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4^4 \\ F_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4^4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_4^4 \\ F_5 \end{bmatrix}.$$

Asamblând acum contribuția fiecărui element aplicând principiul suprapunerii efectelor, se obține relația

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^1+u_2^2 \\ u_3^2+u_3^3 \\ u_4^3+u_4^4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2^1+F_2^2 \\ F_3^2+F_3^3 \\ F_4^3+F_4^4 \\ F_5 \end{bmatrix},$$

adică

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

unde s-a notat

$$u_2 = u_2^1 + u_2^2, \quad u_3 = u_3^2 + u_3^3, \quad u_4 = u_4^3 + u_4^4,$$

$$F_2 = F_2^1 + F_2^2, \quad F_3 = F_3^2 + F_3^3, \quad F_4 = F_4^3 + F_4^4.$$

Ecuația (13) reprezintă modelul global de comportare a sistemului considerat. Sintetic, ea se poate scrie astfel

$$k \cdot u = F, \tag{14}$$

unde

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix},$$

iar $\det(k) = |k| = 0$.

Condițiile la limită $u_1 = 0, u_5 = 0$ se implementează sub forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se observă că această ecuație matriceală este echivalentă cu un sistem de 5 ecuații, în care prima şi ultima reprezintă condițiile la limită $u_1 = 0, u_5 = 0$.

Se impun şi condițiile la limită $F_2 = P$, $F_3 = Q$ şi $F_4 = R$, sub forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ Q \\ R \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Din acest sistem matriceal se determină deplasările u_2, u_3, u_4 şi valorile banale $u_1 = 0, u_5 = 0$. Valorile u_2, u_3 şi u_4 s-ar putea determina considerând, în locul acestui sistem matriceal, doar ecuaţiile 2, 3 şi 4 din sistemul algebric corespunzător.

Ecuaţia matriceală (13)

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix},$$

înlocuind în ea valorile cunoscute u_2, u_3, u_4, $u_1 = 0$, $u_5 = 0$ şi forţele P, Q şi R cunoscute, conduce la ecuaţia matriceală

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ P \\ Q \\ R \\ F_5 \end{bmatrix},$$

de unde se determină forţele F_1 şi F_5 din reazemele sistemului. Aceste două forţe se pot determina, evident, şi din sistemul algebric format din prima şi a cincea ecuaţie a sistemului corespunzător.

Aplicaţie. Să se simuleze un sistem de 4 resorturi în care se cunosc

$k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 4$, $P = 10$, $Q = -20$ şi $R = 30$.

Rezolvare numerică în MathCAD

Varianta 1.

ORIGIN ≡ 1

Datele iniţiale:

k1 := 1   k2 := 2   k3 := 3   k4 := 4

P := 10   Q := −20   R := 30

Matricea proprietăților caracteristice:

$$K := \begin{pmatrix} k1 & -k1 & 0 & 0 & 0 \\ -k1 & k1+k2 & -k2 & 0 & 0 \\ 0 & -k2 & k2+k3 & -k3 & 0 \\ 0 & 0 & -k3 & k3+k4 & -k4 \\ 0 & 0 & 0 & -k4 & k4 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor la limită:

$$Kd := K$$

$$Kd_{1,1} := 1 \quad Kd_{1,2} := 0 \quad Kd_{2,1} := 0 \quad Kd_{5,5} := 1 \quad Kd_{4,5} := 0 \quad Kd_{5,4} := 0$$

$$Kd = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Fd := \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ Q \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor şi reacțiunilor la capete:

$$u := Kd^{-1} \cdot Fd$$

$$F := K \cdot u$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \\ -0.2 \\ 4.2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3.2 \\ 10 \\ -20 \\ 30 \\ -16.8 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

Varianta 2.

Acest program permite generalizarea problemei la un număr de n resorturi.

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

Numărul resorturilor:

$n := 4$

Caracteristicile resorturilor:

$$k := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Forțele care acționează:

$P := 10 \quad Q := -20 \quad R := 30$

Generarea matricei proprietăților caracteristice:

```
MK := | for i ∈ 1 .. n + 1
      |   for j ∈ 1 .. n + 1
      |     K[i, j] ← 0
      | K[1, 1] ← k[1]
      | K[n+1, n+1] ← k[n]
      | for t ∈ 1 .. n − 1
      |   K[t+1, t+1] ← k[t] + k[t+1]
      | for p ∈ 1 .. n
      |   | K[p+1, p] ← −k[p]
      |   | K[p, p+1] ← −k[p]
      | K
```

$$MK = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Generarea matricei proprietăților caracteristice impunând condițiile la limită:

$$MKd := \left| \begin{array}{l} MKd \leftarrow MK \\ MKd_{1,1} \leftarrow 1 \\ MKd_{n+1,n+1} \leftarrow 1 \\ MKd_{1,2} \leftarrow 0 \\ MKd_{2,1} \leftarrow 0 \\ MKd_{n,n+1} \leftarrow 0 \\ MKd_{n+1,n} \leftarrow 0 \\ MKd \end{array} \right.$$

$$MKd = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vectorul forțelor: $Fd := \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ Q \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcularea deplasărilor:

$$u := MKd^{-1} \cdot Fd$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \\ -0.2 \\ 4.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea reacțiunilor la capete:

$$F := MK \cdot u$$

$$F = \begin{pmatrix} -3.2 \\ 10 \\ -20 \\ 30 \\ -16.8 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

Rezolvare numerică în MATLAB

Se consideră cazul în care forța R = F4 este variabilă.

```
clc,clear,format short,
k1=1; k2=2; k3=3; k4=4;
F2=10; F3=-20; F4=30;
 % matricea proprietatilor caracteristice
M=[k1+k2 -k2 0; -k2 k2+k3 -k3; 0 -k3 k3+k4];
 % vectorul fortelor
F=[F2;F3;F4];
 % vectorul deplasarilor
De=inv(M)*F;
nr=15
for i=1:nr
    F(i,1)=[F2];
end
for i=1:nr
    F(i,2)=[F3];
end
for i=1:nr
    F(i,3)=-30+9*(i-1);
    F4(i)=F(i,3);
end
disp('***')
for i=1:nr
    De=inv(M)*[F(i,1) F(i,2) F(i,3)]';
    u2(i)=De(1);
    u3(i)=De(2);
    u4(i)=De(3);
    F1(i)=-k1*u2(i);
    F5(i)=-k4*u4(i);
    SF(i)=F1(i)+F(i,1)+F(i,2)+F(i,3)+F5(i);
end
disp('F1   F2   F3  F4  F5  Suma forțelor  u2  u3  u4 ')
for i=1:nr
d(i,1:9)=[F1(i),F(i,1),F(i,2),F(i,3),F5(i),SF(i),u2(i),u3(i),u4(
i)];
end
d
plot(F4,u2,F4,u3,'--',F4,u4,'-.','linewidth',3),grid on
legend('u2=u2(F4)','u3=u3(F4)','u4=u4(F4)')
```

Se obțin rezultatele:

F1	F2	F3	F4	F5	Condiția de echilibru	u2	u3	u4
4	10	-20	-30	36	0	-4	-11	-9
2.92	10	-20	-21	28.08	0	-2.92	-9.38	-7.02
1.84	10	-20	-12	20.16	0	-1.84	-7.76	-5.04
0.76	10	-20	-3	12.24	0	-0.76	-6.14	-3.06
-0.32	10	-20	6	4.32	0	0.32	-4.52	-1.08
-1.4	10	-20	15	-3.6	0	1.4	-2.9	0.9
-2.48	10	-20	24	-11.52	0	2.48	-1.28	2.88
-3.56	10	-20	33	-19.44	0	3.56	0.34	4.86
-4.64	10	-20	42	-27.36	0	4.64	1.96	6.84
-5.72	10	-20	51	-35.28	0	5.72	3.58	8.82
-6.8	10	-20	60	-43.2	0	6.8	5.2	10.8
-7.88	10	-20	69	-51.12	0	7.88	6.82	12.78
-8.96	10	-20	78	-59.04	0	8.96	8.44	14.76
-10.04	10	-20	87	-66.96	0	10.04	10.06	16.74
-11.12	10	-20	96	-74.88	0	11.12	11.68	18.72

În Figura 3 se poate observa variația deplasărilor în funcție de forța F4.

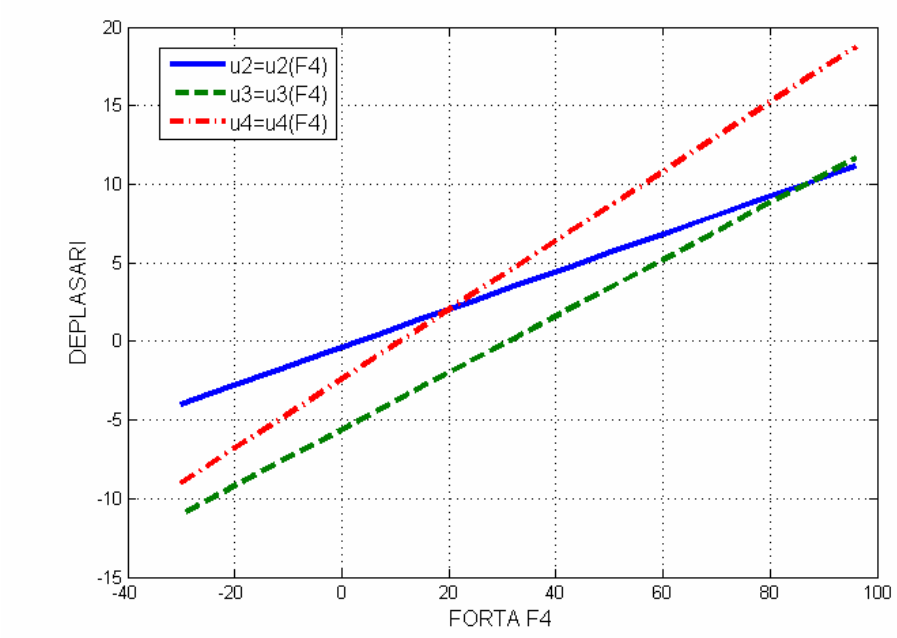


Figura 3. Variația deplasărilor în funcție de forța F4.

§2.2 BARA FORMATĂ DIN TRONSOANE

Se consideră o bară dreaptă, articulată la ambele capete formată din 4 tronsoane având secțiunile A, 2A, A, 3A, şi lungimile 2a, 5a, 4a, 6a, solicitate de un sistem format din trei forțe axiale 2P, 3P şi P (Figura 1).

Se cere determinarea reacțiunilor din nodurile 0 şi 4 precum şi deplasările nodurilor 1, 2 şi 3.

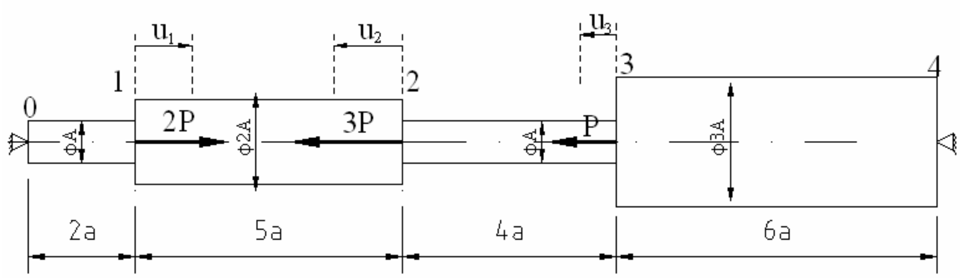


Figura 1. Bara articulată.

Considerăm ipotezele:

• elementul de bară are un comportament linear (se aplică legea lui Hooke: $E \cdot \varepsilon = \sigma$, unde E - modulul de elasticitate , ε - deformația specifică, σ - efortul unitar);

• încărcarea este dată de forțe dirijate în lungul barei şi aplicate în capetele articulațiilor;

• bara nu suportă forțe şi deplasări transversale;

• Lungimea L, aria secțiunii A şi modulul de elasticitate E al materialului vor caracteriza integral comportarea elastică a barei - rigiditatea k = E·A / L.

Vom considera un element de bară de secțiune constantă $A^{<e>}$, de lungime $L^{<e>}$, delimitat de nodurile i şi j (Figura 2) pentru care notăm

• u_i şi u_j deplasările nodurilor i şi j;

• $F_i^{<e>}$ şi $F_j^{<e>}$ forțele nodale elementale din nodurile i şi j.

Figura 2. Element de bară.

Se observă că forța nodală $F_j^{<e>}$ corespunzătoare nodului j coincide cu efortul secțional axial N_j, iar forța nodală $F_i^{<e>}$ corespunzătoare nodului i este egală cu efortul secțional axial N_i, cu semn schimbat

$$\begin{aligned} F_j^{<e>} &= N_j \\ F_i^{<e>} &= -N_i \end{aligned} \qquad (1)$$

Exprimând deformația elementului e, ΔL_{ij} şi forțele nodale $F_i^{<e>}$ şi $F_j^{<e>}$ în funcție de deplasările nodale u_i şi u_j astfel

$$\Delta L_{ij} = u_j - u_i = \frac{N_i \cdot L^{<e>}}{E \cdot A^{<e>}} = \frac{N_j \cdot L^{<e>}}{E \cdot A^{<e>}}, \qquad (2)$$

rezultă

$$\begin{aligned} N_i &= N_j = -\frac{E \cdot A^{<e>}}{L^{<e>}}\left(u_i - u_j\right), \\ F_i^{<e>} &= -N_i = \frac{E \cdot A^{<e>}}{L^{<e>}}\left(u_i - u_j\right), \\ F_j^{<e>} &= N_j = -\frac{E \cdot A^{<e>}}{L^{<e>}}\left(u_i - u_j\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

Relația dintre forțele nodale şi deplasări (3) poate fi scrisă sub formă matriceală astfel

$$\begin{bmatrix} F_i^{<e>} \\ F_j^{<e>} \end{bmatrix} = \frac{EA^{<e>}}{L^{<e>}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Particularizând acest model pentru fiecare element finit în parte şi expandând, se obțin relațiile

Elementul 1:
$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Elementul 2:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_2}{L_2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Elementul 3:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_3}{L_3} & -\frac{EA_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{L_3} & \frac{EA_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Elementul 4:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_4}{L_4} & -\frac{EA_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_4}{L_4} & \frac{EA_4}{L_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3^4 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3^4 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Introducem notațiile

$$u_1 = u_1^1 + u_1^2,\ u_2 = u_2^2 + u_2^3,\ u_3 = u_3^3 + u_3^4,$$

$$F_0 = -H_0,\ F_1 = F_1^1 + F_1^2,\ F_2 = F_2^2 + F_2^3,\ F_3 = F_3^3 + F_3^4,\ F_4 = H_4.$$

Prin ansamblare rezultă un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute F_0, F_4, u_1, u_2, u_3, şi anume

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1}+\frac{EA_2}{L_2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2}+\frac{EA_3}{L_3} & -\frac{EA_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{L_3} & \frac{EA_3}{L_3}+\frac{EA_4}{L_4} & -\frac{EA_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_4}{L_4} & \frac{EA_4}{L_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

care poate fi scris sub forma generală astfel

$$K \cdot \delta = P, \qquad (10)$$

unde K este matricea de rigiditate a sistemului, δ este matricea deplasărilor, iar P matricea forțelor nodale

$$K=\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1}+\frac{EA_2}{L_2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2}+\frac{EA_3}{L_3} & -\frac{EA_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{L_3} & \frac{EA_3}{L_3}+\frac{EA_4}{L_4} & -\frac{EA_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_4}{L_4} & \frac{EA_4}{L_4} \end{bmatrix},$$

$$\delta=\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} -H_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

În formularea matriceală pentru elementul finit, termenii care compun matricea de rigiditate pot fi interpretați ca fiind coeficienți de influență care leagă forțele nodale de deplasările nodale ale structurii.

Conform definiției, valoarea unui coeficient de influență de rigiditate k_{ij} este valoarea forței din nodul “i” pe care o induce o deplasare egală cu unitatea în nodul “j”, deplasările în celelalte noduri fiind 0 (blocate), elementul rămânând în echilibru.

Prin efectuarea înlocuirilor se obține

$$\frac{EA}{a}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{10} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -H_0 \\ 2P \\ -3P \\ -P \\ H_4 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Dacă se introduc condițiile la limită $u_0 = u_4 = 0$ şi se elimină din ecuația matriceală liniile 1 şi 5 corespunzătoare reacțiunilor necunoscte H_0 şi H_4, respectiv coloanele 1 şi 5 corespunzătoare deplasărilor nule $u_0 = u_4 = 0$, rezultă următoarea ecuație matriceală

$$\frac{EA}{a}\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2P \\ -3P \\ -P \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

de unde vectorul deplasărilor necunoscute este

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{a}{EA}\begin{bmatrix} 1.619 & 1.143 & 0.381 \\ 1.143 & 2.571 & 0.857 \\ 0.381 & 0.857 & 1.619 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2P \\ -3P \\ -P \end{bmatrix} = \frac{aP}{EA}\begin{bmatrix} -0.571 \\ -6.284 \\ -3.428 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Din sistemul (12) se pot determina reacțiunile astfel

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2}u_1 = -H_0 \\ &\frac{-1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 = H_4 \end{aligned} \qquad (15)$$

Ştiind condiția la limită $u_0 = u_4 = 0$ se pot determina reacțiunile

$$H_0 = -0.285, \quad H_4 = 1.714.$$

Observație: Problema se poate generaliza considerând că cilindrii nu au acelaşi modul de elesticitate.

Observație: Pentru determinarea reacțiunilor şi a eforturilor axiale pe cale analitică vom forma un sistem cu ajutorul următoarelor două ecuații

$$-H_0 + 2P - 3P - P + H_4 = 0,$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = 0,$$

unde

$$\Delta L_1 = \frac{H_0 \cdot L_1}{EA_1},\ \Delta L_2 = \frac{(H_0 - 2P)\cdot L_2}{EA_2},\ \Delta L_3 = \frac{(H_0 + P)\cdot L_3}{EA_3},\ \Delta L_4 = \frac{H_4 \cdot L_4}{EA_4}.$$

Deci avem două ecuații cu două necunoscute, iar după efectuarea calculelor vor rezulta reacțiunile

$$H_0 = -0.2857P,\quad H_4 = 1.7143P.$$

Eforturile axiale pe fiecare tronson sunt

$$N_{01} = H_0 = -0.2857P,\quad N_{12} = H_0 - 2P = -0.2857P,$$

$$N_{23} = H_0 - 2P + 3P = 0.7143P,\quad N_{34} = H_4 = 1.7143P.$$

Rezolvare numerică în MathCAD

Varianta 1.

$A_1 := 1 \quad A_2 := 2 \quad A_3 := 1 \quad A_4 := 3$

$a := 1 \quad E := 1 \quad P := 1$

$L_1 := 2a \quad L_2 := 5a \quad L_3 := 4a \quad L_4 := 6a$

Matricea de rigiditate a sistemului, redusă:

$$k := \begin{bmatrix} \frac{(E\cdot A_1)\cdot L_2 + (E\cdot A_2)\cdot L_1}{L_1\cdot L_2} & \frac{-(E\cdot A_2)}{L_2} & 0 \\ \frac{-(E\cdot A_2)}{L_2} & \frac{(E\cdot A_2)\cdot L_3 + (E\cdot A_3)\cdot L_2}{L_2\cdot L_3} & \frac{-(E\cdot A_3)}{L_3} \\ 0 & \frac{-(E\cdot A_3)}{L_3} & \frac{(E\cdot A_3)\cdot L_4 + (E\cdot A_4)\cdot L_3}{L_4\cdot L_3} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.65 & -0.25 \\ 0 & -0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \qquad k^{-1} = \begin{pmatrix} 1.619 & 1.143 & 0.381 \\ 1.143 & 2.571 & 0.857 \\ 0.381 & 0.857 & 1.619 \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} := k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2P \\ -3P \\ -P \end{pmatrix}$$

$$u_1 = -0.571$$

$$u_2 = -6.286$$

$$u_3 = -3.429$$

$u_0 := 0 \quad u_4 := 0$

Determinarea reacțiunilor la capete:

$$H_0 := \frac{-u_0}{2} + \frac{u_1}{2} \qquad H_4 := \frac{-u_3}{2} + \frac{u_4}{2}$$

$$H_0 = -0.286 \qquad H_4 = 1.714$$

Determinarea eforturilor axiale:

$N_{01} := H_0 \qquad N_{01} = -0.286$

$N_{12} := H_0 - 2P \qquad N_{12} = -2.286$

$N_{23} := H_0 - 2P + 3P \qquad N_{23} = 0.714$

$N_{43} := H_4 \qquad N_{43} = 1.714$

Varianta 2.

Formularea prezentată utilizează calculul simbolic.

$ORIGIN \equiv 1$

Secțiunile:	Lungimile:	Forțele axiale:
$A1 := A$	$L1 := 2a$	$F1 := 2P$
$A2 := 2A$	$L2 := 5a$	$F2 := -3P$
$A3 := A$	$L3 := 4a$	$F3 := -P$
$A4 := 3A$	$L4 := 6a$	

Matricile caracteristice elementale:

$$k11 := \begin{pmatrix} \frac{E\cdot A}{2a} & -\frac{E\cdot A}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\cdot A}{2a} & \frac{E\cdot A}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k12 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot 2A}{5a} & -\frac{E\cdot 2A}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot 2A}{5a} & \frac{E\cdot 2A}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k13 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{4a} & -\frac{E\cdot A}{4a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{4a} & \frac{E\cdot A}{4a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k14 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E\cdot 3A}{6a} & -\frac{E\cdot 3A}{6a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot 3A}{6a} & \frac{E\cdot 3A}{6a} \end{pmatrix}$$

Matricea de rigiditate a sistemului:

$k1 := k11 + k12 + k13 + k14$

$$k1 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{A\cdot E}{2\cdot a} & -\frac{A\cdot E}{2\cdot a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A\cdot E}{2\cdot a} & \frac{9\cdot A\cdot E}{10\cdot a} & -\frac{2\cdot A\cdot E}{5\cdot a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\cdot A\cdot E}{5\cdot a} & \frac{13\cdot A\cdot E}{20\cdot a} & -\frac{A\cdot E}{4\cdot a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A\cdot E}{4\cdot a} & \frac{3\cdot A\cdot E}{4\cdot a} & -\frac{A\cdot E}{2\cdot a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A\cdot E}{2\cdot a} & \frac{A\cdot E}{2\cdot a} \end{pmatrix}$$

$k := \mathrm{submatrix}(k1, 2, 4, 2, 4)$

$invk := k^{-1}$

$$k \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9\cdot A\cdot E}{10\cdot a} & -\frac{2\cdot A\cdot E}{5\cdot a} & 0 \\ -\frac{2\cdot A\cdot E}{5\cdot a} & \frac{13\cdot A\cdot E}{20\cdot a} & -\frac{A\cdot E}{4\cdot a} \\ 0 & -\frac{A\cdot E}{4\cdot a} & \frac{3\cdot A\cdot E}{4\cdot a} \end{pmatrix} \quad invk \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{34\cdot a}{21\cdot A\cdot E} & \frac{8\cdot a}{7\cdot A\cdot E} & \frac{8\cdot a}{21\cdot A\cdot E} \\ \frac{8\cdot a}{7\cdot A\cdot E} & \frac{18\cdot a}{7\cdot A\cdot E} & \frac{6\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \\ \frac{8\cdot a}{21\cdot A\cdot E} & \frac{6\cdot a}{7\cdot A\cdot E} & \frac{34\cdot a}{21\cdot A\cdot E} \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor:

$$u(a,A,P,E) := invk\cdot\begin{pmatrix} 2P \\ -3P \\ -P \end{pmatrix} \qquad u(a,A,P,E) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \\ -\frac{44\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \\ -\frac{24\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \end{pmatrix}$$

$$u0 := 0 \quad u1 := u(a,A,P,E)_1 \quad u2 := u(a,A,P,E)_2$$

$$u3 := u(a,A,P,E)_3 \quad u4 := 0$$

$$u1 \rightarrow -\frac{4\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \quad u2 \rightarrow -\frac{44\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E} \quad u3 \rightarrow -\frac{24\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E}$$

Determinarea reacțiunilor la capete:

$$H0 := \frac{-u0}{2} + \frac{u1}{2} \qquad H0 \rightarrow -\frac{2\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E}$$

$$H4 := \frac{-u3}{2} + \frac{u4}{2} \qquad H4 \rightarrow \frac{12\cdot P\cdot a}{7\cdot A\cdot E}$$

Rezolvare numerică în MATLAB

Se analizează cazul în care forțele axiale sunt variabile, depinzând de valoarea parametrului P, forțele axiale care solicită structura fiind 2P, 3P şi P.

```
clc,clear,
format short g,
A1=1; A2=2; A3=1; A4=3;
a=1; E=1; P=1;
L1=2*a; L2=5*a; L3=4*a; L4=6*a;
 % matricea de rigiditate a sistemului redusa
```

```
    k(1,:)=[((E*A1)*L2+(E*A2)*L1)/(L1*L2); -(E*A2)/L2 ;0];
    k(2,:)=[-(E*A2)/L2; ((E*A2)*L3+(E*A3)*L2)/(L2*L3); -
(E*A3)/L3];
    k(3,:)=[0 ;-(E*A3)/L3; ((E*A3)*L4+(E*A4)*L3)/(L4*L3)];
    k
     % vectorul fortelor
    F1=2*P; F2=-3*P;F3=-P;
    F=[F1;F2;F3];
    nr=20;
    for i=1:nr
        Pvar(i)=P+10*(i-1);
    end;
    for i=1:nr
        F1(i)=2*Pvar(i);
        F(i,1)=F1(i);
    end
    for i=1:nr
        F2(i)=-3*Pvar(i);
        F(i,2)=F2(i);
    end
    for i=1:nr
        F3(i)=-Pvar(i);
        F(i,3)=F3(i);
    end
    disp(' ')
    % calcularea deplasarilor
    for i=1:nr
        Dep=inv(k)*[F(i,1) F(i,2) F(i,3)]';
        u1(i)=Dep(1);
        u2(i)=Dep(2);
        u3(i)=Dep(3);
    end
    disp('P F1=2*P   F2=-3*P   F3=-P    u1  u2  u3 ')
    for i=1:nr
   rez(i,1:7)=[Pvar(i),F(i,1),F(i,2),F(i,3),u1(i),u2(i),u3(i)];
    end
    rez
    plot(Pvar,u1,Pvar,u2,'--',Pvar,u3,'-.','linewidth',3)
    grid on
    legend('deplasarea u1','deplasarea u2','deplasarea u3')
```

În urma rulării, se obțin rezultatele:

k =

0.9	-0.4	0
-0.4	0.65	-0.25
0	-0.25	0.75

rez =

P	F1=2*P	F2=-3*P	F3=-P	u1	u2	u3
1	2	-3	-1	-0.57143	-6.2857	-3.4286
11	22	-33	-11	-6.2857	-69.143	-37.714
21	42	-63	-21	-12	-132	-72
31	62	-93	-31	-17.714	-194.86	-106.29
41	82	-123	-41	-23.429	-257.71	-140.57
51	102	-153	-51	-29.143	-320.57	-174.86
61	122	-183	-61	-34.857	-383.43	-209.14
71	142	-213	-71	-40.571	-446.29	-243.43
81	162	-243	-81	-46.286	-509.14	-277.71
91	182	-273	-91	-52	-572	-312
101	202	-303	-101	-57.714	-634.86	-346.29
111	222	-333	-111	-63.429	-697.71	-380.57
121	242	-363	-121	-69.143	-760.57	-414.86
131	262	-393	-131	-74.857	-823.43	-449.14
141	282	-423	-141	-80.571	-886.29	-483.43
151	302	-453	-151	-86.286	-949.14	-517.71
161	322	-483	-161	-92	-1012	-552
171	342	-513	-171	-97.714	-1074.9	-586.29
181	362	-543	-181	-103.43	-1137.7	-620.57
191	382	-573	-191	-109.14	-1200.6	-654.86

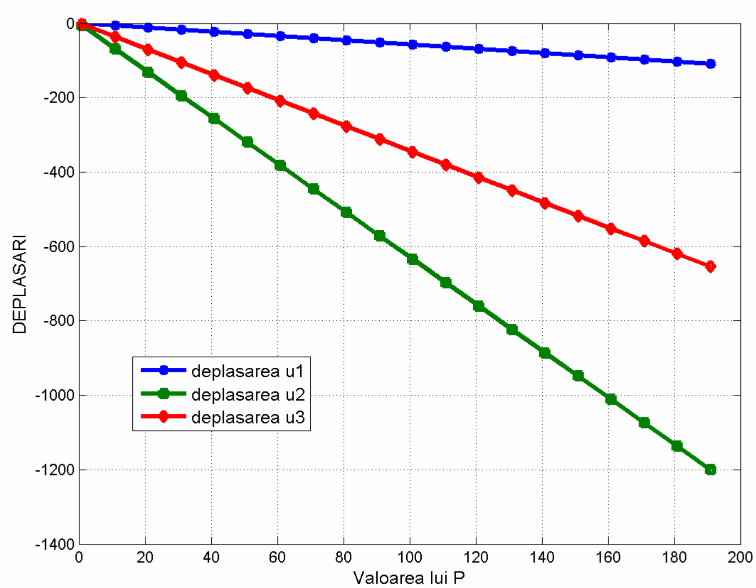


Figura 3. Influența parametrului P asupra deplasărilor nodurilor.

§2.3 STRUCTURI PLANE

Studiem în continuare comportarea unei structuri plane. Discretizarea unei structuri plane se face în mod direct prin descompunere în elemente finite (Figura 1a).

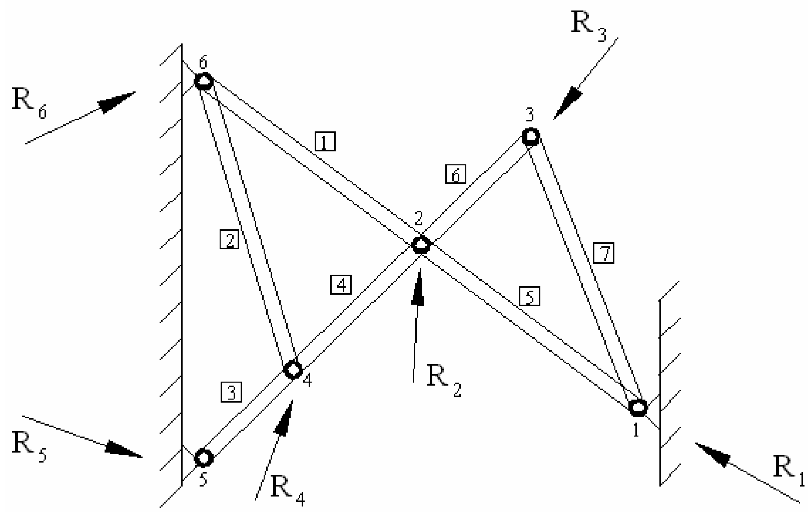


Figura 1a. Structura plană.

Presupunem că în această structură plană barele ce o formează sunt solicitate numai axial, fapt ce conduce la reprezentarea lor cu elemente finite unidimensionale, cu două noduri (Figura 1b).

Modelul analitic trebuie să surprindă fenomenul deformării sub acţiunea forţelor exterioare. Acest model conţine relaţiile de definiţie ale efortului unitar normal σ şi al deformaţiei specifice ε

$$\sigma = P / A\,,\ \ \varepsilon = \Delta\ell / \ell\ , \qquad (1)$$

unde σ este efortul unitar normal, P - forţa axială exterioară, A - secţiunea transversală a barei, ε - deformaţia specifică, ℓ - lungimea iniţială a barei şi $\Delta\ell$ - deformaţia totală a barei sub acţiunea forţei axiale P.

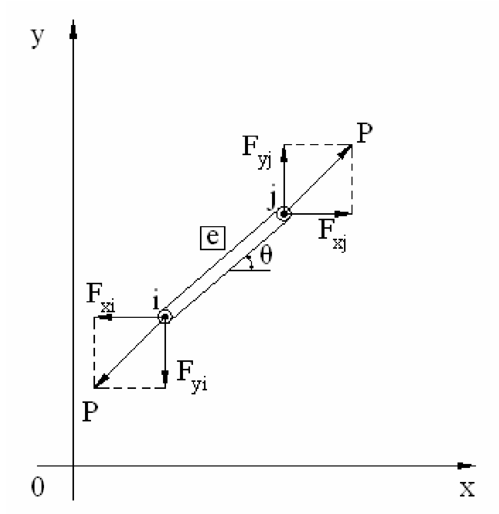


Figura 1b. Element finit sub acțiunea solicitărilor exterioare.

Relațiile anterioare au un caracter general şi sunt valabile pentru orice material. Pentru a putea individualiza comportarea unui anumit material sub acțiunea solicitărilor exterioare trebuie să includem în modelul analitic şi o lege constitutivă, sau de material. Aceasta este legea lui Hooke, care arată că în cazul unei bare solicitate axial, atât timp cât forțele exterioare nu depaşesc o anumită limită, eforturile unitare în bară sunt direct proporționale cu deformațiile specifice

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \,, \qquad (2)$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate (modulul lui Young).

Să considerăm un element finit oarecare e al acestei structuri şi să notăm nodurile lui cu i şi j. Forțele exterioare sunt notate cu $F^{<e>}$ iar cele axiale generate la nivel elemental cu $P^{<e>}$.

Deplasările nodurilor în raport cu poziția lor inițială sunt notate cu $u^{<e>}$. Forțele $F^{<e>}$ şi deplasările nodale $u^{<e>}$ se pot reprezenta prin componentele lor de-a lungul axelor de coordonate, după cum se vede în Figura 2.

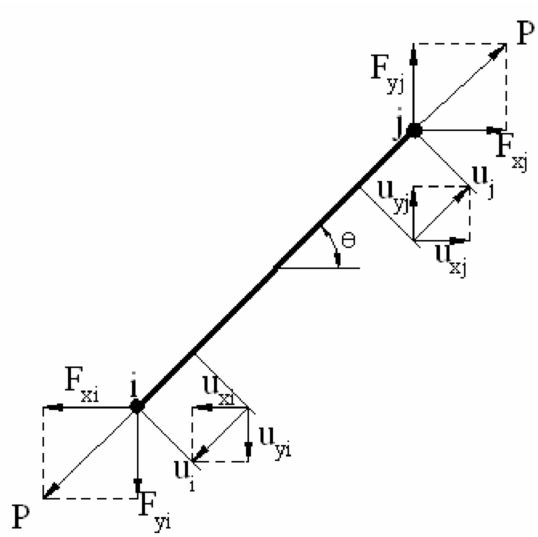


Figura 2. Componentele forțelor și deplasărilor nodale.

Rezultă următoarele relații, raportate la un element finit

$$F^{<e>} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}^{<e>} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} \quad (3), \quad u^{<e>} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^{<e>} = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} \quad (4)$$

Să considerăm deplasarea din nodul i, cu componentele sale (Figura 3)

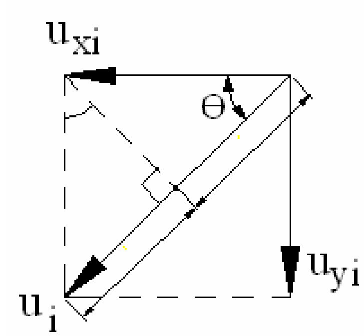


Figura 3. Componentele deplasării u_i din nodul i.

Se poate observa că deplasarea nodului i are expresia

$$u_i = u_{xi}\cos\theta + u_{yi}\sin\theta .$$

În mod analog, pentru nodul j, deplasarea se scrie

$$u_j = u_{xj}\cos\theta + u_{yj}\sin\theta .$$

Sub acțiunea forțelor exterioare, elementul finit se deformează axial cu mărimea

$$\Delta\ell = u_j - u_i = (u_{xj} - u_{xi})\cos\theta + (u_{yj} - u_{yi})\sin\theta . \quad (5)$$

Introducând aceasta în expresia deformației specifice ε şi folosind relațiile (1) şi (2), se obțin relațiile

$$\sigma = P/A\,,\ \sigma = E\cdot\varepsilon\,,\ \ \varepsilon = \Delta\ell/\ell\,,$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\cdot\varepsilon = E\frac{\Delta\ell}{\ell}\,,$$

$$\frac{P}{A} = E\frac{(u_{xj} - u_{xi})\cos\theta + (u_{yj} - u_{yi})\sin\theta}{\ell}\,,$$

de unde rezultă expresia forței axiale

$$P = \frac{EA}{\ell}\left[\left(u_{xj} - u_{xi}\right)\cos\theta + \left(u_{yj} - u_{yi}\right)\sin\theta\right] . \quad (6)$$

Proiectând forța axială pe direcția axelor de coordonate rezultă

$$F^{<e>} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}^{<e>} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} = \begin{bmatrix} -P\cos\theta \\ -P\sin\theta \\ P\cos\theta \\ P\sin\theta \end{bmatrix}^{<e>} . \quad (7)$$

Introducând (6) în (7), rezultă

$$F^{<e>} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell}[(u_{xj}-u_{xi})\cos\theta + (u_{yj}-u_{yi})\sin\theta]\cos\theta \\ -\frac{EA}{\ell}[(u_{xj}-u_{xi})\cos\theta + (u_{yj}-u_{yi})\sin\theta]\sin\theta \\ \frac{EA}{\ell}[(u_{xj}-u_{xi})\cos\theta + (u_{yj}-u_{yi})\sin\theta]\cos\theta \\ \frac{EA}{\ell}[(u_{xj}-u_{xi})\cos\theta + (u_{yj}-u_{yi})\sin\theta]\sin\theta \end{bmatrix}^{<e>} \tag{8}$$

Aranjând termenii astfel încât să fie individualizate componentele deplasărilor nodale, rezultă

$$F^{<e>} = \frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}^{<e>} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} \tag{9}$$

Introducând termenul $\frac{EA}{\ell}$ în interiorul matricei pătratice şi utilizând o notaţie adecvată, se obţine

$$\begin{bmatrix} k_{xi,xi} & k_{xi,yi} & k_{xi,xj} & k_{xi,yj} \\ k_{yi,xi} & k_{yi,yi} & k_{yi,xj} & k_{yi,yj} \\ k_{xj,xi} & k_{xj,yi} & k_{xj,xj} & k_{xj,yj} \\ k_{yj,xi} & k_{yi,yi} & k_{yj,xj} & k_{yj,yj} \end{bmatrix}^{<e>} \cdot \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix}^{<e>} \tag{10}$$

sau sintetic

$$k^{<e>} \cdot u^{<e>} = F^{<e>} \tag{11}$$

Ecuaţia (11) reprezintă ecuaţia matriceală elementală care descrie comportarea unui element finit e oarecare aparţinând unei structuri date, sub acţiunea forţelor exterioare. Termenul $k^{<e>}$ al acestei ecuaţii reprezintă matricea de rigiditate (sau matricea caracteristică) pentru elementul e, termenul $u^{<e>}$ este vectorul deplasărilor nodale, iar $F^{<e>}$ este termenul liber al ecuaţiei sau vectorul forţelor. Ecuaţia (11) constituie nucleul de bază în obținerea modelului global cu elemente finite care să descrie comportarea întregii structuri date.

Aplicație. Se consideră o structură plană formată din două bare articulate ca în Figura 4.

Barele au fiecare o lungime $\ell = 1\ \mathrm{m}$ şi o secțiune transversală $A = 1\ \mathrm{cm}^2$.

Modulul de elasticitate este $E = 2 \cdot 10^{11}\ \dfrac{N}{m^2}$, iar forța exterioară care solicită această structură este $R_2 = 10000\ \mathrm{N}$, având direcția şi sensul conform figurii alăturate.

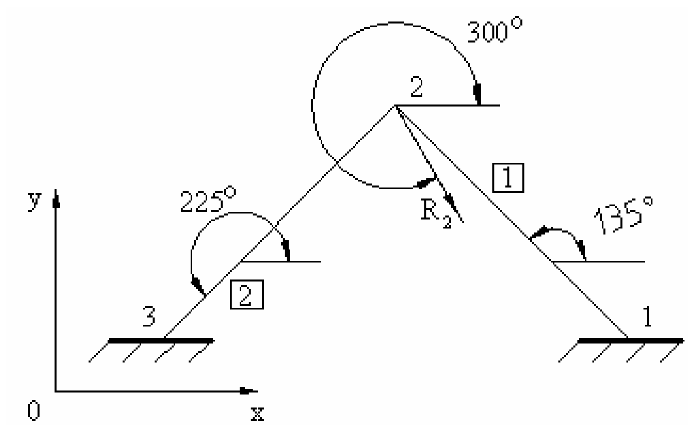


Figura 4. Structură plană cu două elemente.

Discretizarea structurii se face prin descompunerea ei în elementele componente şi identificarea fiecărei bare cu un element finit liniar cu două noduri (i, j), după cum se vede în Figura 2.

Aplicăm modelul elemental fiecărui element finit şi îl expandăm.

Modelul numeric elemental este

$$F^{<e>}=\frac{EA}{\ell}\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}^{<e>}\cdot\begin{bmatrix}u_{xi}\\ u_{yi}\\ u_{xj}\\ u_{yj}\end{bmatrix}^{<e>} \qquad (12)$$

unde

$F^{1T}=\lfloor F^1_{x1} \quad F^1_{y1} \quad F^1_{x2} \quad F^1_{y2}\rfloor$, pentru elementul 1,

$F^{2T}=\lfloor F^2_{x2} \quad F^2_{y2} \quad F^2_{x3} \quad F^2_{y3}\rfloor$, pentru elementul 2,

$\theta=135^0$ pentru elementul 1 şi $\theta=225^0$ pentru elementul 2.

Elementul 1:

$$\frac{2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{1}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{x2}\\ u_{y2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^1_{x1}\\ F^1_{y1}\\ F^1_{x2}\\ F^1_{y2}\end{bmatrix}$$

Expandând acest model la întreaga structură analizată se obține

$$10^7\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{x2}\\ u_{y2}\\ u_{x3}\\ u_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^1_{x1}\\ F^1_{y1}\\ F^1_{x2}\\ F^1_{y2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (13)$$

Elementul 2:

$$\frac{2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}}{1}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5\\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x2}\\ u_{y2}\\ u_{x3}\\ u_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^2_{x2}\\ F^2_{y2}\\ F^2_{x3}\\ F^2_{y3}\end{bmatrix}$$

Expandând acest model la întreaga structură analizată rezultă

$$10^7\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{x2}\\ u_{y2}\\ u_{x3}\\ u_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ F_{x2}^2\\ F_{y2}^2\\ F_{x3}^2\\ F_{y3}^2\end{bmatrix} \tag{14}$$

Asamblând cele două elemente finite utilizând expresiile (13) şi (14) se obține modelul numeric global al structurii date

$$10^7\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{x1}\\ u_{y1}\\ u_{x2}\\ u_{y2}\\ u_{x3}\\ u_{y3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{x1}\\ F_{y1}\\ F_{x2}\\ F_{y2}\\ F_{x3}\\ F_{y3}\end{bmatrix} \tag{15}$$

unde

$$F_{x1}=F_{x1}^1,\quad F_{y1}=F_{y1}^1\ ,$$
$$F_{x2}=F_{x2}^1+F_{x2}^2,\ F_{y2}=F_{y2}^1+F_{y2}^2,$$
$$F_{x3}=F_{x3}^2,\ F_{y3}=F_{y3}^2.$$

Coeficienții din vectorul termenului liber sunt

$$F_{x2}=R_2\cos 300^0=R_2\cos 60^0=10000\cdot\cos 60^0=5000,$$

$$F_{y2}=R_2\sin 300^0=-R_2\sin 60^0=-10000\cdot\sin 60^0=-8660.$$

Condițiile la limită sunt

pentru nodul 1 : $u_{x1}=u_{y1}=0$,

pentru nodul 3 : $u_{x3}=u_{y3}=0$.

Sistemul (15) primeşte forma

$$10^7\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 5000 \\ -8660 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

de unde, din a treia şi a patra ecuaţie se pot determina u_{x2} şi u_{y2}, iar în continuare, din primele două şi ultimele două, reacţiunile cerute din nodurile 1 şi 3. A doua metodă de rezolvare a problemei constă în introducerea forţelor nodale în termenul liber şi implementarea condiţiilor la limită, caz în care ecuaţia (16) devine

$$10^7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \\ -8660 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii conduce la vectorul deplasărilor nodale

$$u = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot 10^{-4} \\ -4.33 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Pentru aflarea reacţiunilor din nodurile 1 şi 3 introducem vectorul deplasărilor nodale (18) în ecuaţia matriceală (16), rezultând

$$10^7 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot 10^{-4} \\ -4.33 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 5000 \\ -8660 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

de unde se obține vectorul forțelor nodale

$$F = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6830 \\ 6830 \\ 5000 \\ -8660 \\ 1830 \\ 1830 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Se observă că, deoarece

$$\sum_{i=1}^{3} F_{xi} = -6830 + 5000 + 1830 = 0 \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{3} F_{yi} = 6830 - 8660 + 1830 = 0,$$

structura plană analizată se află în echilibru static.

Rezolvare numerică în MathCAD

Se consideră cazul structurii plane anterioare cu două elemente asupra căreia acționează o forță constantă R2. În continuare se analizează cazul în care unghiul forței exterioare R2 variază.

Problema 1. Forța exterioară R2 este constantă şi acționează pe structură sub unghi constant.

ORIGIN≡ 1

Barele au fiecare lungimea: lu := 1 m

Secțiunea transversală: $A := 10^{-4}\,m^2$

Modulul de elasticitate: $E := 2\cdot 10^{11}\,N/m^2$

Forța exterioară: $R2 := 10^4\,N$

Matricea caracteristică elementală:

$$Ke(\theta) := \frac{E\cdot A}{lu}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 \\ -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Asamblarea elementului 1:

$$K1 := \mathrm{augment}\left[Ke\left(135\cdot\frac{\pi}{180}\right), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$K1 := \mathrm{stack}\left[K1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Observație. Funcția augment(A, B, C, ...) returnează o matrice formată prin “lipirea” matricelor A, B, C, ... de la stânga spre dreapta.

Funcția stack(A , B, C, ...) returnează o matrice formată prin “așezarea” matricelor A, B, C, ... una sub alta.

$$K1 = \begin{pmatrix} 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 0 & 0 \\ -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & 0 & 0 \\ -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & 0 & 0 \\ 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asamblarea elementului 2:

$$K2 := \mathrm{augment}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Ke\left(225 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right]$$

$$K2 := \mathrm{stack}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K2\right]$$

$$K2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 0 & 0 & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \end{pmatrix}$$

În continuare asamblăm elementele structurii date. Matricea de rigiditate a sistemului este

$$K := K1 + K2$$

$$K = \begin{pmatrix} 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 0 & 0 \\ -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 0 & 0 \\ -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 2\times10^{7} & 1.863\times10^{-9} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1.863\times10^{-9} & 2\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Matricea termenilor liberi este: $TL := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R2 \cdot \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ -R2 \cdot \sin\left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $TL = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \times 10^{3} \\ -8.66 \times 10^{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Implementarea condițiilor la limită în matricea caracteristică:

$KL := K \quad KL_{1,1} := 1 \quad KL_{2,2} := 1 \quad KL_{5,5} := 1 \quad KL_{6,6} := 1$

$i := 2..4 \quad KL_{1,i} := 0 \quad j := 3..4 \quad KL_{2,j} := 0$

$i := 3..4 \quad KL_{5,i} := 0 \quad j := 3..5 \quad KL_{6,j} := 0$

$KL_{3,1} := 0 \quad KL_{3,2} := 0 \quad KL_{4,1} := 0 \quad KL_{4,2} := 0 \quad KL_{3,5} := 0$

$KL_{4,5} := 0 \quad KL_{3,6} := 0 \quad KL_{4,6} := 0 \quad KL_{5,6} := 0 \quad KL_{2,1} := 0$

$$KL = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{7} & 1.863 \times 10^{-9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.863 \times 10^{-9} & 2 \times 10^{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor:

$$u := KL^{-1} \cdot TL \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \times 10^{-4} \\ -4.33 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea reacţiunilor din nodurile 1 şi 3:

$$F := K \cdot u \qquad F = \begin{pmatrix} -6.83 \times 10^{3} \\ 6.83 \times 10^{3} \\ 5 \times 10^{3} \\ -8.66 \times 10^{3} \\ 1.83 \times 10^{3} \\ 1.83 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Problema 2. Studiem cazul în care unghiul α sub care acţionează forţa exterioară R2 variază între 270 şi 300 grade.

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

Lungimea barelor din structură: $lu := 1$ m

Secţiunea transversală: $A := 10^{-4}$ m2

Modulul de elasticitate: $E := 2 \cdot 10^{11}$ N/m2

Forţa exterioară care solicită structura: $R2 := 10^{4}$ N

Matricea caracteristică elementală:

$$Ke(\theta) := \frac{E \cdot A}{lu} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 \\ -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 & \sin(\theta)\cdot\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Asamblarea elementului 1:

$$K1 := \mathrm{augment}\left[Ke\left(135 \cdot \frac{\pi}{180}\right), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathtt{K1} := \mathtt{stack}\left[\mathtt{K1}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathtt{K1} = \begin{pmatrix} 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 0 & 0 \\ -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & 0 & 0 \\ -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & 0 & 0 \\ 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asamblarea elementului 2:

$$\mathtt{K2} := \mathtt{augment}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathtt{Ke}\left(225 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right]$$

$$\mathtt{K2} := \mathtt{stack}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathtt{K2}\right]$$

$$\mathtt{K2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 \\ 0 & 0 & 1\times10^7 & 1\times10^7 & -1\times10^7 & -1\times10^7 \\ 0 & 0 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 \\ 0 & 0 & -1\times10^7 & -1\times10^7 & 1\times10^7 & 1\times10^7 \end{pmatrix}$$

Asamblăm întreaga structură:

$$\mathtt{K} := \mathtt{K1} + \mathtt{K2}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 0 & 0 \\ -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 0 & 0 \\ -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 2\times10^{7} & 1.863\times10^{-9} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1.863\times10^{-9} & 2\times10^{7} & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \\ 0 & 0 & -1\times10^{7} & -1\times10^{7} & 1\times10^{7} & 1\times10^{7} \end{pmatrix}$$

Termenul liber se poate defini astfel:

$$TL(\alpha) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R2\cdot\cos\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) \\ R2\cdot\sin\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{180}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor:

$$dep := \left| \begin{array}{l} \alpha_1 \leftarrow 270 \\ vdep \leftarrow KL^{-1}\cdot TL(\alpha_1) \\ \text{for } i \in 2..10 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_i \leftarrow 270 + 3\cdot i \\ u \leftarrow KL^{-1}\cdot TL(\alpha_i) \\ vdep \leftarrow augment(vdep, u) \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} vdep \\ \alpha \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$deplasari := dep_1$$

$\alpha := dep_2$

deplasari =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$5.226\cdot10^{-5}$	$7.822\cdot10^{-5}$	$1.04\cdot10^{-4}$	$1.294\cdot10^{-4}$	$1.545\cdot10^{-4}$	$1.792\cdot10^{-4}$	$2.034\cdot10^{-4}$	$2.27\cdot10^{-4}$	$2.5\cdot10^{-4}$
4	$-5\cdot10^{-4}$	$-4.973\cdot10^{-4}$	$-4.938\cdot10^{-4}$	$-4.891\cdot10^{-4}$	$-4.83\cdot10^{-4}$	$-4.755\cdot10^{-4}$	$-4.668\cdot10^{-4}$	$-4.568\cdot10^{-4}$	$-4.455\cdot10^{-4}$	$-4.33\cdot10^{-4}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$i := 1 .. 10$

$deplasare\_ux2_i := deplasari_{3,i}$

$deplasare\_uy2_i := deplasari_{4,i}$

deplasare_ux2 =

	1
1	0
2	$5.226\cdot10^{-5}$
3	$7.822\cdot10^{-5}$
4	$1.04\cdot10^{-4}$
5	$1.294\cdot10^{-4}$
6	$1.545\cdot10^{-4}$
7	$1.792\cdot10^{-4}$
8	$2.034\cdot10^{-4}$
9	$2.27\cdot10^{-4}$
10	$2.5\cdot10^{-4}$

deplasare_uy2 =

	1
1	$-5\cdot10^{-4}$
2	$-4.973\cdot10^{-4}$
3	$-4.938\cdot10^{-4}$
4	$-4.891\cdot10^{-4}$
5	$-4.83\cdot10^{-4}$
6	$-4.755\cdot10^{-4}$
7	$-4.668\cdot10^{-4}$
8	$-4.568\cdot10^{-4}$
9	$-4.455\cdot10^{-4}$
10	$-4.33\cdot10^{-4}$

În figurile următoare se poate observa influența asupra deplasărilor din nodul 2, a unghiului sub care forța exterioară R2 solicită structura.

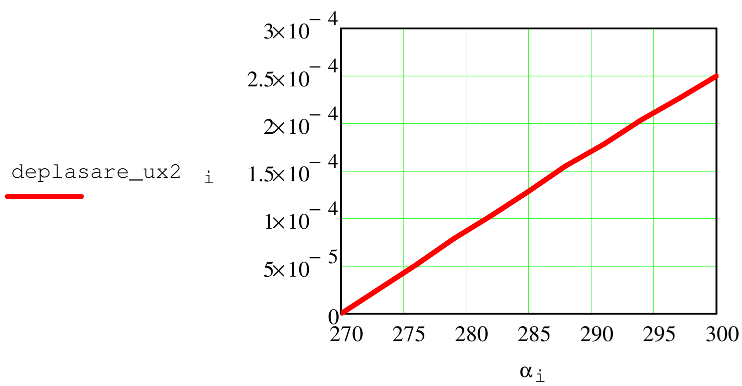


Figura 5. Variația componentei u_{x2} a deplasării din nodul 2, în funcție de unghiul sub care acționează forța exterioară R2.

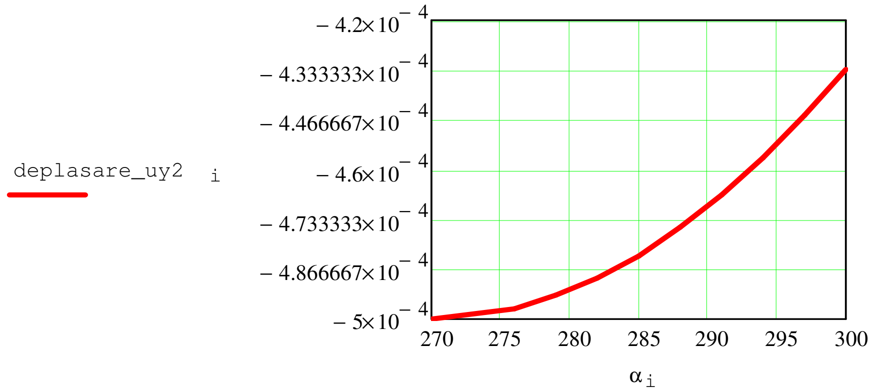


Figura 6. Variația componentei u_{y2} a deplasării din nodul 2, în funcție de unghiul sub care acționează forța exterioară R2.

Rezolvare numerică în MATLAB

Se consideră cazul unei structuri plane cu două elemente, asupra căreia acționează o forță exterioară R2 variabilă, sub unghi constant.

```
clc, clear, format long,
disp('Structura plana '),
h=figure; for i=1:h, close (i), end,
E=1;A=1;lung1=1;lung2=1;
disp('MODULUL FORȚEI R2  VECTORUL DEPLASĂRILOR NODALE'),
disp('      R2             ux2              uy2 ')
disp('___________________________________________'),
disp(' '),
disp(' '),
mat=[1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 2 0 0 0;
   0 0 0 2 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];
mat1=[1 -1 -1 1 0 0;-1 1 1 -1 0 0;-1 1 2 0 -1 -1;
   1 -1 0 2 -1 -1;0 0 -1 -1 1 1;0 0 -1 -1 1 1];
nrc=21;
for in=1:nrc
R2(in)=10000+(in-1)*100;Fx2(in)=R2(in)*cos(pi/3);
Fy2(in)=-R2(in)*sin(pi/3);
w(in,:)=[R2(in) Fx2(in) Fy2(in)];
Fr(in,:)=[0 0 Fx2(in) Fy2(in) 0 0];F=Fr';
```

```
uv=10^(-7)*inv(mat)*F(:,in);u(:,in)=uv;
React(:,in)=10^(7)*mat1*uv;REACȚIUNI=React';
vr=[R2(in)  u(3,in)  u(4,in)];
var(in,:)=vr;
end
dep(:,1)=var(:,1);dep(:,2)=var(:,2);dep(:,3)=var(:,3);
dep
var,disp(' '),disp(' '),disp(' '),
disp('       VECTORUL FORȚELOR NODALE')
disp(' Fx1     Fy1     Fx2     Fy2     Fx3     Fy3 ')
disp('_________________________________________________'),
disp(''),
disp(' '),REACȚIUNI
  %deplasări
x=var(:,1);y=var(:,2);
h=figure;plot(x,y),grid on
title('ux2=ux2(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('ux2'),
x=var(:,1);y=var(:,3);
h=figure;plot(x,y),grid on
title('uy2=uy2(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('uy2'),
x=var(:,1);y=var(:,2);
h=figure;plot(x,y,'+'),grid on
title('ux2=ux2(R2)+     uy2=uy2(R2)*'), hold on
x=var(:,1);y=var(:,3);
plot(x,y,'*'),
  %reactiuni
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,1);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fx1=Fx1(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fx1'),
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,2);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fy1=Fy1(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fy1'),
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,3);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fx2=Fx2(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fx2'),
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,4);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fy2=Fy2(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fy2'),
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,5);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fx3=Fx3(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fx3'),
x=var(:,1);y=REACȚIUNI(:,6);
h=figure;plot(x,y,'linewidth',3),grid on
title('Fy3=Fy3(R2)'),xlabel('R2'),ylabel('Fy3')
```

Se obțin rezultatele:

MODULUL FORȚEI R2 VECTORUL DEPLASĂRILOR NODALE

R2	ux2	uy2
dep = 1.0e+004 *		
1.000000000000000	0.000000025000000	-0.000000043301270
1.010000000000000	0.000000025250000	-0.000000043734283
1.020000000000000	0.000000025500000	-0.000000044167296
1.030000000000000	0.000000025750000	-0.000000044600308
1.040000000000000	0.000000026000000	-0.000000045033321
1.050000000000000	0.000000026250000	-0.000000045466334
1.060000000000000	0.000000026500000	-0.000000045899346
1.070000000000000	0.000000026750000	-0.000000046332359
1.080000000000000	0.000000027000000	-0.000000046765372
1.090000000000000	0.000000027250000	-0.000000047198385
1.100000000000000	0.000000027500000	-0.000000047631397
1.110000000000000	0.000000027750000	-0.000000048064410
1.120000000000000	0.000000028000000	-0.000000048497423
1.130000000000000	0.000000028250000	-0.000000048930435
1.140000000000000	0.000000028500000	-0.000000049363448
1.150000000000000	0.000000028750000	-0.000000049796461
1.160000000000000	0.000000029000000	-0.000000050229473
1.170000000000000	0.000000029250000	-0.000000050662486
1.180000000000000	0.000000029500000	-0.000000051095499
1.190000000000000	0.000000029750000	-0.000000051528512
1.200000000000000	0.000000030000000	-0.000000051961524

VECTORUL FORȚELOR NODALE

Fx1	Fy1	Fx2	Fy2	Fx3	Fy3
REACTIUNI = 1.0e+004 *					
-0.6830	0.6830	0.5000	-0.8660	0.1830	0.1830
-0.6898	0.6898	0.5050	-0.8747	0.1848	0.1848
-0.6967	0.6967	0.5100	-0.8833	0.1867	0.1867
-0.7035	0.7035	0.5150	-0.8920	0.1885	0.1885
-0.7103	0.7103	0.5200	-0.9007	0.1903	0.1903
-0.7172	0.7172	0.5250	-0.9093	0.1922	0.1922
-0.7240	0.7240	0.5300	-0.9180	0.1940	0.1940
-0.7308	0.7308	0.5350	-0.9266	0.1958	0.1958
-0.7377	0.7377	0.5400	-0.9353	0.1977	0.1977
-0.7445	0.7445	0.5450	-0.9440	0.1995	0.1995
-0.7513	0.7513	0.5500	-0.9526	0.2013	0.2013
-0.7581	0.7581	0.5550	-0.9613	0.2031	0.2031
-0.7650	0.7650	0.5600	-0.9699	0.2050	0.2050
-0.7718	0.7718	0.5650	-0.9786	0.2068	0.2068
-0.7786	0.7786	0.5700	-0.9873	0.2086	0.2086
-0.7855	0.7855	0.5750	-0.9959	0.2105	0.2105

-0.7923	0.7923	0.5800	-1.0046	0.2123	0.2123
-0.7991	0.7991	0.5850	-1.0132	0.2141	0.2141
-0.8060	0.8060	0.5900	-1.0219	0.2160	0.2160
-0.8128	0.8128	0.5950	-1.0306	0.2178	0.2178
-0.8196	0.8196	0.6000	-1.0392	0.2196	0.2196

Figura următoare prezintă influența forței exterioare R2 variabilă, asupra componentelor deplasărilor din nodul 2.

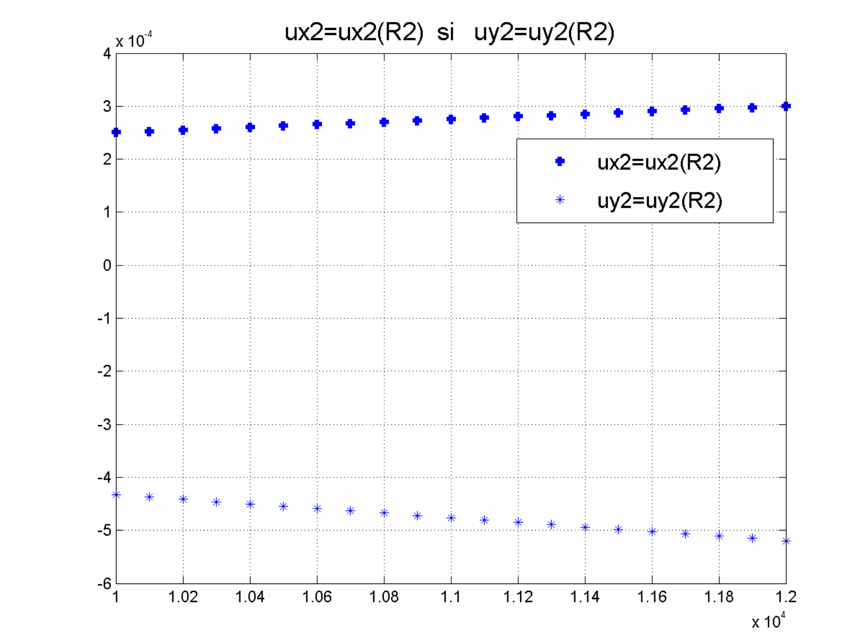


Figura 7. Variația deplasărilor din nodul 2 în funcție de forța exterioară variabilă R2.

§2.4 STUDIUL DEPLASĂRILOR UNEI COLOANE SUB SARCINĂ

Prin coloană se înțelege de obicei o bară supusă unei forțe axiale de compresiune. Spre deosebire de structura plană alcătuită dintr-un număr finit de elemente componente, în cazul de față avem de modelat comportarea unui mediu continuu, alcătuit dintr-o infinitate de elemente componente. Modelul analitic de bază are deci un alt conținut, reflectând în esență ecuații de teoria elasticității. Mai mult de atât, el se obține de obicei pe cale variațională sub formă integrală.

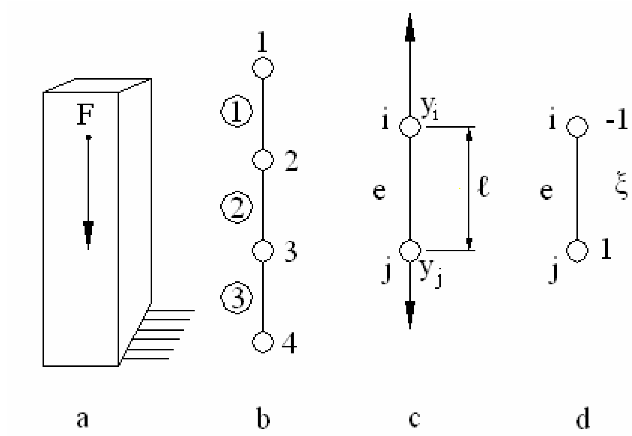


Figura 1. Coloana sub sarcină.

Conform principiului energiei potențiale minime, pentru coloana aflată în echilibru din figura alăturată, într-un mod simplificat se poate spune că dacă un corp elastic aflat sub sarcină este în echilibru în raport cu anumite condiții la limită şi restricții geometrice, atunci energia potențială a corpului deformat va lua o valoare staționară.

Pentru cazul corpurilor liniar elastice, această valoare este minimă,

$$d\pi = 0\,, \tag{1}$$

funcționala π fiind

$$\pi = \int_V \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \, dV - \int_V \overline{F} u \, dV - \int_{S_T} \overline{T} u \, dS \,, \tag{2}$$

unde s-a notat cu $\overline{F}$ forța masică pe unitatea de volum a materialului, cu $\overline{T}$ tracțiunea sau forța specifică de suprafață şi cu S_T segmentul de frontieră pe care se specifică această tracțiune (cu bară s-au notat mărimile date, deci cunoscute, ale problemei) iar σ este efortul unitar normal şi ε deformația specifică. Deformația specifică se defineşte prin derivata deplasării, iar comportarea materialului se descrie prin legea lui Hooke

$$\varepsilon = du / dy \,, \tag{3}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \,. \tag{4}$$

Se observă că primul termen al funcționalei π reprezintă energia de deformație a corpului studiat.

Condițiile la limită asociate acestui caz implică cunoaşterea forțelor $\overline{F}$ şi $\overline{T}$, respectiv deplasarea la baza coloanei. În general, această deplasare se consideră nulă (u = 0).

Modelul analitic de bază pentru analiza comportării unei coloane sub sarcină este alcătuit din relațiile (1) - (4) şi condițiile la limită aferente.

Coloana studiată în Figura 1a este un corp cu o structură continuă, discretizarea ei se poate realiza folosind elemente finite unidimensionale (Figura 1b). Să considerăm un element finit oarecare e cu nodurile i şi j (Figura 1c). Notăm cu $V^{<e>}$ volumul său şi cu $S_T^{<e>}$ porțiunea de frontieră pe care este indicată tracțiunea $\overline{T}$. Funcționala dată în (2) se poate scrie ca o sumă de contribuții elementale, sub forma

$$\pi = \sum_{e=1}^{3} \left\{ \int_{V^{<e>}} \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \, dV - \int_{V^{<e>}} \overline{F} u \, dV - \int_{S_T^{<e>}} \overline{T} u \, dS \right\} . \tag{5}$$

Să urmărim contribuția elementului generic e. Pentru simplificare vom considera că aria secțiunii transversale a elementului este constantă şi deci se poate scrie

$$\pi^{<e>} = \frac{A}{2}\int_0^\ell \sigma\varepsilon \, dy - A\int_0^\ell \overline{F}u \, dy - \int_0^\ell \overline{T}u \, dy \ , \qquad (6)$$

unde s-a notat cu ℓ lungimea elementului finit ($\ell = y_j - y_i$). Pentru uşurarea procesului de integrare se folosesc de obicei elemente finite izoparametrice, definite cu ajutorul sistemului local de coordonate ξ – naturale, ca în Figura 1d. Termenul de izoparametric se referă la faptul ca aceeaşi funcție care descrie forma elementului este utilizată şi pentru definirea deplasărilor.

Se introduc funcțiile de formă

$$N_i(\xi) = (1-\xi)/2 \quad , \quad N_j(\xi) = (1+\xi)/2 \quad , \ \xi \in [-1, 1] \quad (7)$$

şi funcția de aproximare pentru variabila de câmp

$$\hat{u}(\xi) = N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j \ , \qquad (8)$$

unde s-a notat cu u_i şi u_j deplasările corespunzătoare nodurilor i şi j.

Un punct oarecare aparținând elementului finit e se raportează la sistemul inițial, global, de coordonate, utilizând transformarea

$$y = N_i(\xi)y_i + N_j(\xi)y_j = \frac{1-\xi}{2}y_i + \frac{1+\xi}{2}y_j \ , \qquad (9)$$

$$dy = \frac{-d\xi}{2}y_i + \frac{d\xi}{2}y_j = \frac{y_j - y_i}{2}d\xi = \frac{\ell}{2}d\xi \qquad (10)$$

Folosind relațiile (7) - (10), contribuția elementală pentru funcționala π

$$\pi^{<e>} = \frac{A}{2}\int_0^\ell \sigma\varepsilon \, dy - A\int_0^\ell \overline{F}u \, dy - \int_0^\ell \overline{T}u \, dy$$

devine

$$\pi^{<e>} = \frac{A\ell}{4}\int_{-1}^{1} \sigma\varepsilon \, d\xi - \frac{A\ell}{2}\int_{-1}^{1} \overline{F}\hat{u} \, d\xi - \frac{\ell}{2}\int_{-1}^{1} \overline{T}\hat{u} \, d\xi \, . \qquad (11)$$

Să evaluăm acum integrandul primului termen folosind relațiile (3), (4), (7) şi (8) :

$$\varepsilon = \frac{d\hat{u}}{dy} = \frac{d\hat{u}}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dy} = \left(-\frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}u_j\right)\frac{2}{\ell} = \frac{u_j - u_i}{\ell}\ , \qquad (12)$$

rezultând că

$$\sigma\cdot\varepsilon = E\cdot\varepsilon^2 = \frac{E\left(u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2\right)}{\ell^2}. \qquad (13)$$

Introducând (7), (8) şi (12) în (11), se obține egalitatea

$$\pi^{<e>} = \frac{AE}{4\ell}\int_{-1}^{1}\left(u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2\right)d\xi - \frac{A\ell\overline{F}}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j\right]d\xi -$$

$$-\frac{\overline{T}\ell}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_i + \frac{1}{2}(1+\xi)u_j\right]d\xi \qquad (14)$$

Se observă că funcționala $\pi^{<e>}$ este funcție de deplasările nodale u_i şi u_j. Minimizarea ei în raport cu aceste mărimi, în concordanță cu aplicarea principiului energiei potențiale minime pentru întreaga coloană aflată sub sarcină, conduce la condiția că $d\pi^{<e>} = 0$, respectiv

$$\frac{\partial\pi^{<e>}}{\partial u_i} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial\pi^{<e>}}{\partial u_j} = 0, \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\pi^{<e>}}{\partial u_i} = \frac{AE}{4\ell}\int_{-1}^{1}\left(2u_i - 2u_j\right)d\xi - \frac{A\ell\overline{F}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-\xi)d\xi - \frac{\overline{T}\ell}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-\xi)d\xi = 0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial\pi^{<e>}}{\partial u_j} = \frac{AE}{4\ell}\int_{-1}^{1}\left(-2u_i + 2u_j\right)d\xi - \frac{A\ell\overline{F}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+\xi)d\xi - \frac{\overline{T}\ell}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+\xi)d\xi = 0 \qquad (17)$$

Observând că u_i şi u_j sunt mărimi nodale care nu depind de ξ şi integrând termenii din (16) şi (17), se obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &\frac{AE}{\ell}\left(u_i - u_j\right) - \frac{A\ell\overline{F}}{2} - \frac{\overline{T}\ell}{2} = 0 \\ &\frac{AE}{\ell}\left(-u_i + u_j\right) - \frac{A\ell\overline{F}}{2} - \frac{\overline{T}\ell}{2} = 0 \end{aligned}, \qquad (18)$$

care poate fi scris în formă matriceală astfel

$$\frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{A\ell\overline{F}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Notând matricea coeficient cu $k^{<e>}$ şi termenul liber cu $F^{<e>}$, rezultă ecuaţia matriceală elementală sub forma

$$k^{<e>} \cdot u^{<e>} = F^{<e>}, \qquad (20)$$

unde $k^{<e>} = \frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $u^{<e>} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$, $F^{<e>} = \begin{bmatrix} \frac{A\ell\overline{F}}{2} + \frac{T\ell}{2} \\ \frac{A\ell\overline{F}}{2} + \frac{T\ell}{2} \end{bmatrix}$.

Această ecuaţie descrie comportarea elementului generic e şi constituie nucleul de bază în stabilirea modelului global cu elemente finite care să descrie comportarea întregii structuri aflate sub sarcină.

Procesul de asamblare

Asamblarea este un proces de reunire a elementelor finite şi de sinteză a domeniului de analiză considerat. Pe plan geometric, rezultatul procesului de asamblare îl constituie refacerea domeniului, iar pe plan funcţional, obţinerea modelului numeric global al corpului studiat. Asamblarea apare deci ca un proces reciproc discretizării, dar numai pe plan geometric. Între etapele de discretizare şi de asamblare a elementelor finite are loc etapa de obţinere a modelului numeric elemental. Se produce deci o încărcare a elementelor finite cu variabile de câmp şi relaţii între aceste variabile, care vor genera în final modelul numeric global.

Deoarece pe plan geometric asambarea conduce la reconstituirea domeniului iniţial de analiză fără a oferi informaţii suplimentare în raport cu discretizarea, ne vom referi în cele ce urmează la asamblarea funcțională a elementelor finite, şi respectiv, la obținerea modelului numeric global al obiectului de investigat.

Asamblarea elementelor finite se poate face în două moduri: **secvențial** sau **după noduri**.

În primul caz, elementele finite se iau unul câte unul, în ordinea crescândă a numerotării lor. În cel de-al doilea caz se iau nodurile globale ale sistemului unul câte unul şi se asamblează elementele finite din jurul fiecărui nod. Indiferent de procedeul folosit, rezultatul final - modelul numeric global – este acelaşi.

Ceea ce poate diferi însă este forma lui de prezentare. Pentru probleme de dimensiuni mici, acest model numeric global se obține sub forma unui sistem de ecuații, cu matricele coeficient stocate în întregime sau în bandă. Pentru probleme de dimensiuni mari modelul numeric global se obține pe bucăți sau partiționat şi se rezolvă prin metode iterative.

Asamblarea după noduri

Acest procedeu este folosit îndeosebi atunci când obținerea modelului numeric elemental se face variațional.

Deşi, pentru o înțelegere mai uşoară a fenomenului fizic, am considerat cazul unui singur element e aflat în echilibru, este necesar să subliniem că de fapt ne interesează echilibrul întregului corp, respectiv al întregului ansamblu de elemente finite. Asamblarea elementelor finite ne va permite în acest caz să obținem valoarea staționară (minimă) a energiei potențiale totale a coloanei aflate sub sarcină.

Să considerăm domeniul de analiză discretizat ca în Figura 1, unde s-au folosit trei elemente şi patru noduri. Relațiile de discretizare dintre elemente şi noduri sunt date în matricele de conexiuni din Tabelul 1a.

Tabelul 1a. Matrice de conexiuni după noduri.

Noduri	Elemente	
	e1	e2
1	-	1
2	1	2
3	2	3
4	3	-

Alegerea nodului pentru originea sistemului de numerotare este arbitrară. În cazul de față s-a început de la partea superioară a coloanei, deoarece sensul de acționare al forței exterioare este de sus în jos şi deci deplasările vor fi pozitive într-o astfel de orientare a axei de coordonate, respectiv a nodurilor. Nu ar fi constituit o greşeală însă dacă originea axei de coordonate s-ar fi luat la baza coloanei sau în centrul ei de greutate.

Considerăm că fiecare element finit se caracterizează printr-o arie $A^{<e>}$ a secțiunii transversale, o anumită lungime $\ell^{<e>}$ şi un anumit modul de elasticitate $E^{<e>}$ (e = 1, 2, 3). De asemenea, pentru fiecare element finit acționează forțe distincte $\overline{F}^{<e>}$ şi $\overline{T}^{<e>}$ (e = 1, 2, 3). Energia potențială totală este dată de funcționala

$$\pi = \sum_{e=1}^{3} \pi^{<e>} = \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{4\ell^{<1>}} \int_{-1}^{1} \left(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2\right) d\xi + $$

$$+ \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{4\ell^{<2>}} \int_{-1}^{1} \left(u_2^2 - 2u_2u_3 + u_3^2\right) d\xi + \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{4l^{<3>}} \int_{-1}^{1} \left(u_3^2 - 2u_3u_4 + u_4^2\right) d\xi -$$

$$-\frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2\right] d\xi - \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_2 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_3\right] d\xi -$$

$$-\frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_4\right] d\xi - \frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2\right] d\xi -$$

$$-\frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_2 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_3\right] d\xi - \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(1-\xi)u_3 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_4\right] d\xi$$

(22)

Deoarece u_1, u_2, u_3 şi u_4 sunt mărimi independente, pentru realizarea echilibrului global al ansamblului de elemente finite este necesar să minimizăm energia potențială totală π în raport cu fiecare dintre aceste variabile

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_1}=0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial u_2}=0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial u_3}=0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial u_4}=0. \quad (23)$$

Observăm că un nod este comun, în cazul de față, la cel mult două elemente finite vecine. De exemplu, nodul 2 este comun pentru elementul 1 şi elementul 2. Deplasarea nodală u_2 este influențată deci de comportarea ambelor elemente vecine şi ca atare

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_2}=\frac{\partial \pi^{<1>}}{\partial u_2}+\frac{\partial \pi^{<2>}}{\partial u_2}. \qquad (24)$$

În general, acest fapt se poate scrie

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_i}=\sum_{e=1}^{m}\frac{\partial \pi^{<e>}}{\partial u_i}, \qquad (25)$$

unde cu i s-a notat un nod oarecare al domeniului discretizat, iar cu m numărul elementelor e care se învecinează cu acest nod şi pe care îl conțin. Aplicând relația (25) pentru fiecare din ecuațiile (23), se obține sistemul

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_1}=\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}}(u_1-u_2)-\frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2}=0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_2}=\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}}(-u_1+u_2)-\frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2}+\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}}(u_2-u_3)-$$

$$-\frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2}=0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_3}=\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}}(-u_2+u_3)-\frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2}+\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}}(u_3-u_4)-$$

$$-\frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2}=0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_4}=\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}}(-u_3+u_4)-\frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2}-\frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2}=0. \quad (26)$$

Punând sistemul (26) într-o formă matriceală se obține

$$\begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & 0 & 0 \\ -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}}+\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & 0 \\ 0 & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}}+\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \\ 0 & 0 & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2}+\frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \\ \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2}+\frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \\ \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2}+\frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Ecuația matriceală (27) constituie modelul numeric global al comportării coloanei sub sarcină. Ecuația matriceală (27) se poate scrie simbolic astfel

$$k \cdot u = F, \quad (28)$$

unde matricea coeficient k şi vectorii u si F au fost obținuți prin asamblarea matricelor elementale $k^{<e>}$ şi, respectiv, a vectorilor elementali $u^{<e>}$, $F^{<e>}$.

Asamblarea după elemente

Asamblarea după elemente constituie procedeul cel mai des întâlnit în practica modelării cu elemente finite, datorită uşurinței de realizare a subrutinelor de asamblare. În esență, procedeul constă din două faze succesive: expandarea şi asamblarea propriu-zisă.

Prin expandare, modelul matriceal elemental se raportează la sistemul global de noduri, folosind în acest scop matricea de conexiuni după elemente (Tabelul 1b).

Tabelul 1b. Matrice de conexiuni după elemente.

Elemente	Noduri	
	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Coeficienții matriceali nu suferă în această fază nici o modificare. Se transformă numai poziția lor prin trecerea de la un sistem local de numerotare a nodurilor la unul global.

Reamintim relația generală (19)

$$\frac{AE}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{A\ell\overline{F}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T\ell}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

care pentru primul element primeşte forma

$$\begin{bmatrix} \dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & -\dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} \\ -\dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & \dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \dfrac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ \dfrac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \dfrac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Pe baza acestor considerații, prezentăm mai jos modelul numeric elemental pentru fiecare element finit al coloanei sub sarcină şi apoi forma lui expandată.

Elementul 1:

Unitar

$$\begin{bmatrix} \dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & -\dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} \\ -\dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & \dfrac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \dfrac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ \dfrac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \dfrac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \end{bmatrix}$$

Expandat

$$\begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & 0 & 0 \\ -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elementul 2:

Unitar

$$\begin{bmatrix} \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} \\ -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \\ \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \end{bmatrix}$$

Expandat

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & 0 \\ 0 & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \\ \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elementul 3:

Unitar

$$\begin{bmatrix} \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \\ -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \\ \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \end{bmatrix}$$

Expandat

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \\ 0 & 0 & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \\ \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \end{bmatrix}$$

Faza de asamblare propriu-zisă a elementelor finite constă din suprapunerea modelelor elementale expandate, astfel încât coeficienții matriceali din două elemente vecine să se însumeze la nodurile comune. Din punct de vedere matematic aceasta înseamnă să adunăm matricele coeficient şi vectorii termenilor liberi corespunzători modelelor numerice elementale.

Rezultatul procesului de asamblare pentru exemplul considerat este următorul sistem matriceal

$$\begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & 0 & 0 \\ -\frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} & \frac{A^{<1>}E^{<1>}}{\ell^{<1>}} + \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & 0 \\ 0 & -\frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} & \frac{A^{<2>}E^{<2>}}{\ell^{<2>}} + \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \\ 0 & 0 & -\frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} & \frac{A^{<3>}E^{<3>}}{\ell^{<3>}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} \\ \frac{A^{<1>}\ell^{<1>}\overline{F}^{<1>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<1>}\ell^{<1>}}{2} + \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} \\ \frac{A^{<2>}\ell^{<2>}\overline{F}^{<2>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<2>}\ell^{<2>}}{2} + \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \\ \frac{A^{<3>}\ell^{<3>}\overline{F}^{<3>}}{2} + \frac{\overline{T}^{<3>}\ell^{<3>}}{2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Se remarcă faptul că rezultatul final este acelaşi ca şi cel obţinut la asamblarea elementelor finite după noduri.

Implementarea condiţiilor la limită

Condiţiile la limită considerate în cadrul modelului analitic trebuie să se introducă în modelul numeric global. Implementarea lor se face în funcţie de tipul de condiţie la limită şi de structura modelului numeric global. Astfel, în funcţie de natura lor, unele condiţii la limită pot fi implementate încă din faza de constituire a modelului numeric elemental, iar altele după ce s-a obţinut modelul global asamblat.

Condiţii la limită încorporate în modelul numeric global

Aceste condiţii au fost introduse pe parcursul constituirii modelului numeric elemental. Ele pot apărea direct, în mod explicit în structura acestui model prin prezenţa unor coeficienţi matriceali, sau numai în mod implicit. Din prima categorie fac parte în general condiţii de specificare a unor forţe exterioare sau temperaturi ale mediului ambiant şi coeficienţii de transfer al căldurii de la/spre corpul analizat. Acestea sunt în general condiţii la limită mixte sau Cauchy. Dacă pe porţiunea de frontieră S_T sau S_α, unde pot fi specificate aceste condiţii, nu acţionează forţe sau nu există transfer de caldură convectiv, atunci coeficienţii matriceali corespunzători devin egali cu zero. Din cea de-a doua categorie fac parte condiţiile de tip Neumann, când se cunoaşte derivata variabilei de câmp, sau fluxul lui printr-un segment de frontieră. De obicei aceste condiţii implică valori nule şi sunt satisfăcute în mod implicit prin însăşi natura constituirii modelului numeric cu elemente finite. Datorită acestui fapt ele se mai numesc şi condiţii la limită naturale.

Condiţii la limită neîncorporate în modelul numeric global

Aceste condiţii sunt de tip Dirichlet şi trebuie introduse în modelul numeric global. Introducerea lor se va face astfel ca în sistemul matriceal final să se opereze cît mai puţine modificări. Vom prezenta în cele ce urmează două dintre cele mai folosite procedee de implementare a acestor condiții la limită. Pentru urmărirea lor mai ușoară să considerăm un model numeric global de forma celui prezentat în ecuația (30):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Să presupunem că se cunosc deplasările nodurilor 1 şi 4:

$$u_1 = \bar{u}_1 \quad , \quad u_4 = \bar{u}_4 . \tag{32}$$

Rămân deci necunoscute numai deplasările nodale u_2 şi u_3. Pentru a nu transforma acest sistem de patru ecuații într-unul de două ecuații cu două necunoscute, restructurare greu de realizat în cazul sistemelor mari, se păstrează structura sistemului, dar se operează în interiorul ei astfel:

1) se înlocuiesc coeficienții diagonalei corespunzători nodurilor considerate cunoscute cu 1 ($k_{11} = 1, k_{44} = 1$);

2) se înlocuiesc coeficienții din termenul liber corespunzători nodurilor 1 şi 4 cu valorile date ale deplasărilor ($R_1 = \bar{u}_1$ şi $R_4 = \bar{u}_4$);

3) se trec în partea termenului liber coeficienții care multiplică aceste deplasări nodale ($k_{21}\bar{u}_1,\ k_{24}\bar{u}_4,\ k_{31}\bar{u}_1,\ \ k_{34}\bar{u}_4$);

4) se înlocuiesc toți coeficienții din matricea coeficient de pe rândurile 1, 4 şi coloanele 1, 4 (cu excepția coeficienților de pe diagonală) cu 0.

Rezultatul acestor modificări conduce la noua formă a sistemului final de ecuații

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ R_2 - k_{21}.\bar{u}_1 - k_{24}.\bar{u}_4 \\ R_3 - k_{31}.\bar{u}_1 - k_{34}.\bar{u}_4 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Se observă imediat că s-a obținut un fals sistem de patru ecuații cu patru necunoscute, întrucât prima şi ultima ecuație reprezintă de fapt condițiile (32). Se preferă totuşi această manieră de implementare a condițiilor la limită de tip Dirichlet datorită avantajelor computaționale pe care le are față de o eventuală restructurare totală a sistemului de ecuații, respectiv de reducere a lui numai la ecuațiile aferente valorilor nodale necunoscute.

O altă metodă de implementare a condițiilor Dirichlet este aceea de a înmulți coeficienții diagonali aferenți valorilor nodale cunoscute cu un număr foarte mare, de exemplu 10^{15}, în acelaşi timp se înlocuiesc coeficienții termenului liber corespunzători cu aceste valori nodale cunoscute, înmulțite cu coeficienții diagonali şi cu numărul ales. Procedând astfel, transformăm sistemul matriceal (31) cu condițiile (32) în ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} k_{11}\cdot 10^{15} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}\cdot 10^{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u}_1 k_{11}\cdot 10^{15} \\ R_2 \\ R_3 \\ \overline{u}_4 k_{44}\cdot 10^{15} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Pentru a vedea dacă acest procedeu oferă rezultatul dorit să considerăm prima ecuație

$$k_{11}\cdot 10^{15} u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + k_{14}u_4 = \overline{u}_1 k_{11}\cdot 10^{15}.$$

Deoarece $k_{11}\cdot 10^{15} >> k_{1j}$, $j = 2, 3, 4$ rezultă practic $u_1 = \overline{u}_1$.

Odată implementate condițiile la limită, se trece la rezolvarea sistemelor de ecuații şi aflarea variabilelor nodale pentru mărimile de câmp analizate.

Rezolvare numerică. Presupunem că această coloană are o secțiune transversală constantă, cu aria $A = 1\,cm^2$. Coloana are o înălțime de 30 cm şi un modul de elasticitate $E = 1000\,N/cm^2$. Forța masică specifică este $\overline{F} = 0.5\,N/cm^3$, iar cea de suprafață $\overline{T} = 1\,N/cm^2$. Pentru baza coloanei se impune condiția ca deplasarea nodală corespunzătoare să fie nulă. Se cere să se analizeze comportarea acestei coloane.

Discretizarea corpului se face folosind elemente finite liniare egale şi vom obţine modelul numeric elemental în forma lui normală şi apoi în cea expandată pentru fiecare element. Notăm faptul că

$$A^{<1>} = A^{<2>} = A^{<3>} = A, \quad E^{<1>} = E^{<2>} = E^{<3>} = E,$$

$$\ell^{<1>} = \ell^{<2>} = \ell^{<3>} = \ell, \quad \overline{F}^{<1>} = \overline{F}^{<2>} = \overline{F}^{<3>} = \overline{F}, \quad \overline{T}^{<1>} = \overline{T}^{<2>} = \overline{T}^{<3>} = \overline{T}.$$

Modelul numeric elemental este

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{\ell} & -\frac{AE}{\ell} \\ -\frac{AE}{\ell} & \frac{AE}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A\ell\overline{F}}{2} + \frac{\overline{T}\ell}{2} \\ \frac{A\ell\overline{F}}{2} + \frac{\overline{T}\ell}{2} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Elementul 1:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elementul 2:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 7.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elementul 3:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

Prin asamblarea elementelor se obţine modelul numeric global

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 15 \\ 7.5 \end{bmatrix}. \qquad (36)$$

În sistemul final de ecuații (36) se introduce condiția la limită $u_4 = 0$ şi se obține

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (37) se obțin deplasările nodale

$$u_1 = 0.675\text{cm}, \quad u_2 = 0.60 \text{ cm}, \quad u_3 = 0.375\text{cm}, \quad u_4 = 0.$$

Deformația specifică a fiecărui element este dată de

$$\varepsilon^{<e>} = \frac{du}{dy} = \frac{dN_i}{dy} u_i + \frac{dN_j}{dy} u_j = \frac{u_j - u_i}{\ell}.$$

Considerând e = 1, 2, 3 şi i, j = 1, 2, 3, 4 se obțin

$$\varepsilon^{<1>} = -7.5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon^{<2>} = -22.5 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon^{<3>} = -37.5 \cdot 10^{-3}.$$

Aplicând legea lui Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$, se obțin eforturile unitare elementale

$$\sigma^{<1>} = -7.5\text{N}/\text{cm}^2, \; \sigma^{<2>} = -22.5\text{N}/\text{cm}^2, \; \sigma^{<3>} = -37.5\text{N}/\text{cm}^2.$$

Observație:

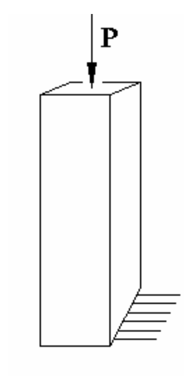


Figura 2. Coloana aflată sub sarcina concentrată P.

Dacă în loc de forțele distribuite $\overline{F}$ şi $\overline{T}$ se consideră o sarcină concentrată $P = 10\ N$ acționând la partea superioară a coloanei (Figura 2), atunci sistemul final de ecuații devine

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (38)$$

Rezolvarea ecuației matriciale (38) conduce la următoarele valori ale deplasărilor nodale

$$u_1 = 0.3\ \text{cm}, \quad u_2 = 0.2\ \text{cm}, \quad u_3 = 0.1\ \text{cm}, \quad u_4 = 0.$$

Deformația specifică şi efortul unitar pentru fiecare element devin în noile condiții

$$\varepsilon^{<1>} = -10^{-2}, \quad \varepsilon^{<2>} = -10^{-2}, \quad \varepsilon^{<3>} = -10^{-2},$$

$$\sigma^{<1>} = -10 N/cm^2, \quad \sigma^{<2>} = -10 N/cm^2, \quad \sigma^{<3>} = -10 N/cm^2.$$

Rezolvare numerică în MathCAD

Acest program permite generalizarea problemei la n noduri.

ORIGIN $\equiv 1$

Aria secțiunii coloanei (cm^2): $A := 1$

Lungimea coloanei (cm): $lung := 30$

Forța masică specifică (N/cm^3): $F := 0.5$

Forța masică specifică de suprafață (N/cm^2): $T := 1$

Modulul de elasticitate (N/cm^2): $E := 1000$

Numărul de noduri: $N := 4$

Lungimea unui element finit: $l := \dfrac{lung}{N-1}$

Asamblarea matricei elementelor finite:

$$\mathtt{elem} := \frac{A \cdot E}{l} \qquad ME := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad \text{for } j \in 1..N \\ \quad\quad E_{i,j} \leftarrow 0 \\ E_{1,1} \leftarrow \mathtt{elem} \\ E_{N,N} \leftarrow \mathtt{elem} \\ \text{for } t \in 1..N-2 \\ \quad E_{t+1,t+1} \leftarrow 2 \cdot \mathtt{elem} \\ \text{for } p \in 1..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} E_{p+1,p} \leftarrow -\mathtt{elem} \\ E_{p,p+1} \leftarrow -\mathtt{elem} \end{array}\right. \\ E \end{array}\right.$$

$$ME = \begin{pmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{pmatrix}$$

Declararea matricei termenilor liberi:

$$\mathtt{term} := \frac{A \cdot l \cdot F}{2} + \frac{T \cdot l}{2} \qquad ML := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad L_i \leftarrow \mathtt{term} \\ \text{for } j \in 2..N-1 \\ \quad L_j \leftarrow 2 \cdot \mathtt{term} \\ L \end{array}\right. \qquad ML = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 15 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor la limită:

$$ME_{N,N} := 1 \quad ME_{N,N-1} := 0 \quad ME_{N-1,N} := 0 \quad ML_N := 0$$

$$\mathtt{ME} = \begin{pmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{ML} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea deplasărilor:

$$\mathtt{u} := \mathtt{ME}^{-1} \cdot \mathtt{ML} \qquad \mathtt{u} = \begin{pmatrix} 0.675 \\ 0.6 \\ 0.375 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcularea deformațiilor specifice:

$$\mathtt{i} := 1 .. \ \mathtt{N} - 1$$

$$\mathtt{epsilon}_{\mathtt{i}} := \frac{\mathtt{u}_{\mathtt{i}+1} - \mathtt{u}_{\mathtt{i}}}{\mathtt{l}} \qquad \mathtt{epsilon} = \begin{pmatrix} -7.5 \times 10^{-3} \\ -0.023 \\ -0.038 \end{pmatrix}$$

Eforturile unitare elementale, obținute din Legea lui Hooke:

$$\mathtt{i} := 1 .. \ \mathtt{N} - 1$$

$$\mathtt{sigma}_{\mathtt{i}} := \mathtt{epsilon}_{\mathtt{i}} \cdot \mathtt{E} \qquad \mathtt{sigma} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ -22.5 \\ -37.5 \end{pmatrix}$$

Rezolvare numerică în MATLAB

Varianta 1. Cazul forțelor distribuite (F, T) care acționează asupra coloanei.

```
    clc,clear
    disp('  COLOANA SUB SARCINĂ (Cazul forțelor distribuite)')
    disp(' ')
    A=input('Introduceți aria secțiunii coloanei analizate
[cm^2]:
    A= ');
    disp(' ')
    l=input('Introduceți lungimea coloanei analizate [cm]: l=
');
    disp(' ')
```

```
     F=input('Introduceţi valoarea forţei masice specifice
[N/cm^3]:
     F= ');
     disp(' ')
     T=input('Introduceţi valoarea forţei masice specifice de
suprafaţă [kg/cm^2]: T= ');
     disp(' ')
     E=input('Introduceţi valoarea modulului de elasticitate
[N/cm^2]: E= ');
     disp(' ')
     nrnod=input('Introduceţi numărul de noduri al coloanei N=
');
     b=zeros(nrnod);
     l=l/(nrnod-1);
     n=2;
     a=zeros(n);
     kapa=(A*E)/l;
     a(1,1)=kapa;
     a(1,2)=-kapa;
     a(2,1)=-kapa;
     a(2,2)=kapa;
     term=(A*l*F+T*l)/2;
     for i=1:n
        for j=1:n
           b(i,j)=a(i,j);
        end
     end
       %ansamblarea matricelor elementelor finite
     q=nrnod-n;
     s=zeros(nrnod);
     for t=1:q
        c=zeros(nrnod);
     for i=1:n
        for j=1:n
           c(i+t,j+t)=a(i,j);
        end
     end
     s=s+c;
     end
     matr=s+b;
     disp(' ')
     disp(' ')
       %declararea vectorului termenilor liberi
     for i=1:nrnod-1
        k(i)=term*2;
     end
     k(1)=term;
     k(nrnod)=0;
```

```
     k=k';
     matr(nrnod,:)=0;
     matr(:,nrnod)=0;
     matr(nrnod,nrnod)=1;
       %calcularea deplasarilor
     dep=matr\k;
     dep=dep';
     disp('          DEPLASĂRILE ÎN NODURILE COLOANEI');
     disp(' ')
     for i=1:nrnod-1
        disp(['deplasarea in nodul nr.',num2str(i),' este de
',num2str(dep(i)),'cm']);
     disp(' ')
     end
     disp(['Deplasarea in nodul nr.',num2str(i+1),',la baza
coloanei,este ',num2str(dep(i+1)),'cm']);
     disp(' ')
       %calcularea deformatiilor specifice
     disp('   DEFORMAŢIILE SPECIFICE ALE FIECĂRUI ELEMENT');
     disp(' ')
     epsilon(nrnod-1)=0;
     for i=1:nrnod-1
        epsilon(i)=((dep(i+1)-dep(i))/l);
        disp(['Deformaţia specifică a elementului
nr.',num2str(i),' este epsilon',num2str(i),' =
',num2str(epsilon(i))]);
     disp(' ')
     end
       %eforturile unitare elementale
     disp('  Aplicând legea lui Hooke , se obţin EFORTURILE
UNITARE ELEMENTALE : ');
     disp(' ')
     disp(' ')
     for i=1:nrnod-1
        sigma=epsilon(i)*E;
        disp(['Efortul unitar in elementul nr.',num2str(i),'
este sigma',num2str(i),' = ',num2str(sigma),' N/cm^2']);
     end
```

În urma rulării programului prezentat se obţin următoarele rezultate:

```
      DEPLASĂRILE IN NODURILE COLOANEI
Deplasarea în nodul nr.1 este de 0.675cm
Deplasarea în nodul nr.2 este de 0.6cm
Deplasarea în nodul nr.3 este de 0.375cm
```

```
Deplasarea în nodul nr.4,la baza coloanei,este 0cm
      DEFORMAŢIILE SPECIFICE ALE FIECĂRUI ELEMENT
Deformaţia specifică a elementului nr.1 este epsilon1 = -0.0075
Deformaţia specifică a elementului nr.2 este epsilon2 = -0.0225
Deformaţia specifică a elementului nr.3 este epsilon3 = -0.0375
      Aplicând legea lui Hooke , se obţin EFORTURILE UNITARE
ELEMENTALE :
Efortul unitar in elementul nr.1 este sigma1 = -7.5 N/cm^2
Efortul unitar in elementul nr.2 este sigma2 = -22.5 N/cm^2
Efortul unitar in elementul nr.3 este sigma3 = -37.5 N/cm^2
```

Varianta 2. Cazul sarcinii concentrate P care acționează în partea superioară a coloanei.

```
     clc,clear
     disp('   COLOANA SUB SARCINĂ (Cazul sarcinii concentrate)')
     disp(' ')
     A=input('  Introduceţi aria sectiunii coloanei analizate
[cm^2]: A= ');
     disp(' ')
     l=input(' Introduceţi lungimea coloanei analizate [cm]: l=
');
     disp(' ')
     P=input(' Introduceţi valoarea forţei concentrate aplicate
coloanei [N]: P= ');
     disp(' ')
     E=input(' Introduceţi valoarea modulului de elasticitate
[N/cm^2]: E= ');
     disp(' ')
     nrnod=input(' Introduceţi numărul de noduri al coloanei N=
');
     b=zeros(nrnod);
     l=l/(nrnod-1);
     n=2;
     a=zeros(n);
     kapa=(A*E)/l;
     a(1,1)=kapa;
     a(1,2)=-kapa;
     a(2,1)=-kapa;
     a(2,2)=kapa;
     term=P;
```

```
    for i=1:n
       for j=1:n
          b(i,j)=a(i,j);
       end
    end
     %ansamblarea matricelor elementelor finite
    q=nrnod-n;
    s=zeros(nrnod);
    for t=1:q
       c=zeros(nrnod);
    for i=1:n
       for j=1:n
          c(i+t,j+t)=a(i,j);
       end
    end
    s=s+c;
    end
    matr=s+b;
    disp(' ')
    disp(' ')
     %declararea vectorului termenilor liberi
    for i=1:nrnod
       k(i)=0;
    end
    k(1)=term;
    k=k';
    matr(nrnod,:)=0;
    matr(:,nrnod)=0;
    matr(nrnod,nrnod)=1;
     %calcularea deplasarilor
    dep=matr\k;
    dep=dep';
    disp('          DEPLASĂRILE ÎN NODURILE COLOANEI');
    disp(' ')
    for i=1:nrnod-1
       disp(['Deplasarea in nodul nr.',num2str(i),' este de
',num2str(dep(i)),'cm']);
       disp(' ')
    end
    disp(['deplasarea in nodul nr.',num2str(i+1),',la baza
coloanei,este ',num2str(dep(i+1)),'cm']);
    disp(' ')
     %calcularea deformatiilor specifice
    disp('    DEFORMAȚIILE SPECIFICE ALE FIECĂRUI ELEMENT');
    epsilon(nrnod-1)=0;
    disp(' ')
    for i=1:nrnod-1
       epsilon(i)=((dep(i+1)-dep(i))/l);
```

```
        disp(['Deformaţia specifică a elementului
nr.',num2str(i),' este epsilon',num2str(i),' =
',num2str(epsilon(i))]);
     disp(' ')
     end
      %eforturile unitare elementale
     disp('  Aplicând legea lui Hooke , se obţin EFORTURILE
UNITARE ELEMENTALE : ');
     disp(' ')
     for i=1:nrnod-1
        sigma=epsilon(i)*E;
        disp(['Efortul unitar in elementul nr.',num2str(i),'
este sigma',num2str(i),' = ',num2str(sigma),' N/cm^2']);
     disp(' ')
     end
```

În urma rulării acestei variante de program se obţin următoarele rezultate:

```
      DEPLASĂRILE ÎN NODURILE COLOANEI
Deplasarea în nodul nr.1 este de 0.675cm
Deplasarea în nodul nr.2 este de 0.45cm
Deplasarea în nodul nr.3 este de 0.225cm
Deplasarea în nodul nr.4,la baza coloanei,este 0cm
       DEFORMAŢIILE SPECIFICE ALE FIECARUI ELEMENT
Deformaţia specifică a elementului nr.1 este epsilon1 = -0.0225
Deformaţia specifică a elementului nr.2 este epsilon2 = -0.0225
Deformaţia specifică a elementului nr.3 este epsilon3 = -0.0225
      Aplicând legea lui Hooke , se obţin EFORTURILE UNITARE
ELEMENTALE :
Efortul unitar în elementul nr.1 este sigma1 = -22.5 N/cm^2
Efortul unitar în elementul nr.2 este sigma2 = -22.5 N/cm^2
Efortul unitar în elementul nr.3 este sigma3 = -22.5 N/cm^2
```

§2.5 MIŞCAREA PLAN PARALELĂ LAMINARĂ ÎN CANALE PARALELE

Considerăm cazul mişcării unui fluid între două plăci paralele (Figura 1). Mişcarea este generată de deplasarea plăcii superioare de-a lungul axei x, dar rămânând mereu paralelă cu placa inferioară. Prin urmare, fluidul se mişcă într-o singură direcție, având numere Reynolds foarte mici (mişcare laminară).

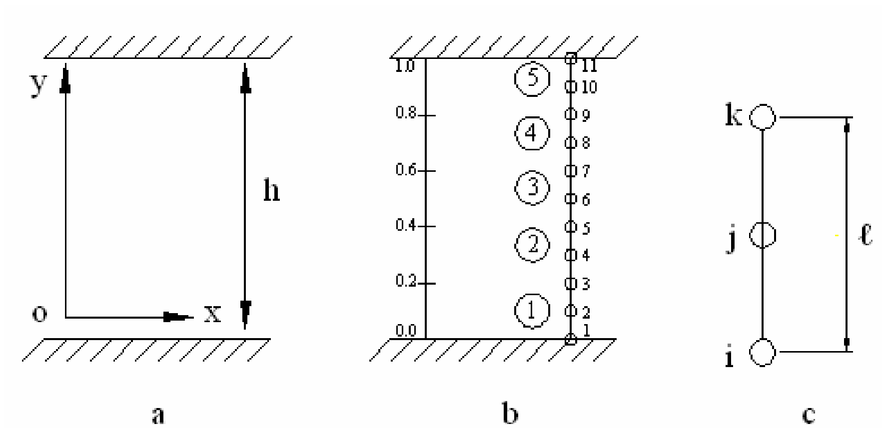


Figura 1. **a** - domeniul de analiză; **b** - discretizarea domeniului; **c** - element finit pătratic.

Ecuația fundamentală în acest caz descrie interdependența dintre câmpul de presiune şi cel de viteză care există în masa de fluid dintre cele două plăci paralele

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}, \qquad (1)$$

unde s-a notat cu p - presiunea, u - viteza fluidului şi μ - coeficientul de vâscozitate.

Vom transforma această ecuație utilizând mărimi adimensionale. Notând cu U_0 viteza plăcii superioare şi cu h înălțimea dintre plăci, se pot defini mărimile

$$u^* = \frac{u}{U_0}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad P^* = \frac{h^2}{\mu U_0}\left(-\frac{dp}{dx}\right), \qquad (2)$$

iar ecuația fundamentală devine

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} + P^* = 0 . \qquad (3)$$

Condițiile la limită se stabilesc urmărind procesul fizic din Figura 1 şi relațiile (2)

$$\begin{array}{l} u^* = 0, \ \text{pentru} \ \ y^* = 0 \\ u^* = 1 \ \ \text{pentru} \ \ y^* = 1 \end{array} . \qquad (4)$$

Modelul analitic de bază este constituit din ecuația fundamentală (3) care încorporează şi legea de material (μ-const.) şi condițiile la limită (4). Subliniem faptul că, în cazul de față, modelul analitic este de tip diferențial. Aceasta înseamnă că înainte de a se trece la determinarea modelului numeric propriu-zis este nevoie de transformarea lui într-un model integral.

Pentru discretizarea domeniului de analiză folosim elemente finite unidimensionale de gradul doi (Figura 1b), matricea de conexiuni find prezentată în Tabelul 1.

Tabelul 1. Matricea de conexiuni după elemente.

Elemente	Noduri		
	i	j	k
1	1	2	3
2	3	4	5
3	5	6	7
4	7	8	9
5	9	10	11

Stabilim o funcție pentru deplasări $u = u(y)$, de formă parabolică

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 , \qquad (5)$$

care este continuă pe domeniul corespunzător elementului şi asigură compatibilitatea interelemente.

Rezultă sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 y_i + \alpha_3 y_i^2 = u_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 y_j + \alpha_3 y_j^2 = u_j \\ \alpha_1 + \alpha_2 y_k + \alpha_3 y_k^2 = u_k \end{cases} \tag{6}$$

Pentru elementul finit e (Figura 1c), de lungime ℓ, având nodurile i, j, k, se consideră

$$y_i = 0,\ \ y_j = \frac{\ell}{2},\ \ y_k = \ell \tag{7}$$

şi prin înlocuirea acestor valori în sistemul (6), se obţin rezultatele

$$\alpha_1 = u_i,\ \ \alpha_2 = \frac{1}{\ell}\left(-3u_i + 4u_j - u_k\right),\ \ \alpha_3 = \frac{2}{\ell^2}\left(u_i - 2u_j + u_k\right). \tag{8}$$

Substituind relaţiile (8) în expresia (5) şi rearanjând termenii, rezultă

$$u = \left(1 - \frac{2y^*}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y^*}{\ell}\right)u_i + \frac{4y^*}{\ell}\left(1 - \frac{y^*}{\ell}\right)u_j + \frac{y^*}{\ell}\left(\frac{2y^*}{\ell} - 1\right)u_k \tag{9}$$

Funcţiile

$$N_i(y^*) = \left(1 - \frac{2y^*}{\ell}\right)\left(1 - \frac{y^*}{\ell}\right),\ \ N_j(y^*) = \frac{4y^*}{\ell}\left(1 - \frac{y^*}{\ell}\right),$$

$$N_k(y^*) = -\frac{y^*}{\ell}\left(1 - \frac{2y^*}{\ell}\right)$$

sunt funcţiile de formă cu ajutorul cărora se va defini funcţia de aproximare a vitezei.

Funcţiile de formă au proprietatea de a fi normate în nodul de definiţie, având valoarea nulă în celelalte, adică

$$
\begin{aligned}
&N_i(y_i^*) = 1, \quad N_i(y_j^*) = 0, \quad N_i(y_k^*) = 0 \\
&N_j(y_i^*) = 0, \quad N_j(y_j^*) = 1, \quad N_j(y_k^*) = 0 \\
&N_k(y_i^*) = 0, \quad N_k(y_j^*) = 0, \quad N_k(y_k^*) = 1
\end{aligned} \quad . \qquad (10)
$$

Funcția de aproximare a vitezei pe domeniul unui element finit este

$$\hat{u} = N_i(y^*)u_i + N_j(y^*)u_j + N_k(y^*)u_k \, . \qquad (11)$$

Introducând această funcție în ecuația fundamentală avem

$$\frac{d^2\hat{u}}{dy^{*2}} + P^* = 0$$

şi aplicând metoda lui Galerkin de obținere a unei formulări integrale, se obține sistemul de ecuații

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\ell} N_i \left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^{*2}} + P^* \right) dy^* = 0 \\
&\int_0^{\ell} N_j \left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^{*2}} + P^* \right) dy^* = 0 \\
&\int_0^{\ell} N_k \left(\frac{d^2\hat{u}}{dy^{*2}} + P^* \right) dy^* = 0
\end{aligned} \quad . \qquad (12)
$$

Observând că

$$\frac{d}{dy^*}\left(N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) = \frac{dN_i}{dy^*}\frac{d\hat{u}}{dy^*} + N_i \frac{d^2\hat{u}}{dy^{*2}} ,$$

adică

$$N_i \frac{d^2 \hat{u}}{dy^{*2}} = \frac{d}{dy^*}\left(N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) - \frac{dN_i}{dy^*}\frac{d\hat{u}}{dy^*},$$

se rescrie sistemul de ecuații (12) în forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\ell} \frac{d}{dy^*}\left(N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* - \int_0^{\ell} \frac{dN_i}{dy^*}\frac{d\hat{u}}{dy^*} dy^* + \int_0^{\ell} N_i P^* dy^* = 0 \\
&\int_0^{\ell} \frac{d}{dy^*}\left(N_j \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* - \int_0^{\ell} \frac{dN_j}{dy^*}\frac{d\hat{u}}{dy^*} dy^* + \int_0^{\ell} N_j P^* dy^* = 0 \quad . \qquad (13) \\
&\int_0^{\ell} \frac{d}{dy^*}\left(N_k \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* - \int_0^{\ell} \frac{dN_k}{dy^*}\frac{d\hat{u}}{dy^*} dy^* + \int_0^{\ell} N_k P^* dy^* = 0
\end{aligned}$$

Integrând primii termeni ai ecuațiilor (13) între limitele y_i^*, y_k^* şi ținând cont de proprietatea funcțiilor de formă (10), rezultă relațiile:

$$\begin{aligned}
&\int_{y_i^*}^{y_k^*} \frac{d}{dy^*}\left(N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* = N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_k^*} - N_i \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_i^*} = -\left(\frac{d\hat{u}}{dy^*}\right)_{y_i^*} \\
&\int_{y_i^*}^{y_k^*} \frac{d}{dy^*}\left(N_j \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* = N_j \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_k^*} - N_j \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_i^*} = 0 \qquad .(14) \\
&\int_{y_i^*}^{y_k^*} \frac{d}{dy^*}\left(N_k \frac{d\hat{u}}{dy^*} \right) dy^* = N_k \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_k^*} - N_k \frac{d\hat{u}}{dy^*}\bigg|_{y_i^*} = \left(\frac{d\hat{u}}{dy^*}\right)_{y_k^*}
\end{aligned}$$

Cu aceste rezultate, sistemul de ecuații (13) devine

$$\int_0^{\ell} \left(\frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*} u_i + \frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*} u_j + \frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*} u_k \right) dy^* = \int_0^{\ell} N_i P^* dy^* - \left(\frac{d\hat{u}}{dy^*} \right)_{y_i^*}$$

$$\int_0^{\ell}\left(\frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}u_i+\frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}u_j+\frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}u_k\right)dy^*=\int_0^{\ell}N_jP^*dy^* \quad (15)$$

$$\int_0^{\ell}\left(\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}u_i+\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}u_j+\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}u_k\right)dy^*=\int_0^{\ell}N_kP^*dy^*+\left(\frac{d\hat{u}}{dy^*}\right)_{y_k^*}$$

Acest sistem de ecuații poate fi pus în formă matriceală

$$\begin{bmatrix}\int_0^{\ell}\frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^*\\ \int_0^{\ell}\frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^*\\ \int_0^{\ell}\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell}\frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_i\\ u_j\\ u_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\int_0^{\ell}N_iP^*dy^*-(\frac{d\hat{u}}{dy^*})_{y_i^*}\\ \int_0^{\ell}N_jP^*dy^*\\ \int_0^{\ell}N_kP^*dy^*+(\frac{d\hat{u}}{dy^*})_{y_k^*}\end{bmatrix} \quad (16)$$

Derivând funcția de aproximare a vitezei pe domeniul unui element finit (11) rezultă:

$$\begin{aligned}(\frac{d\hat{u}}{dy^*})_{y_i^*}&=\left.\frac{dN_i}{dy^*}\right|_{y_i^*}\cdot u_i+\left.\frac{dN_j}{dy^*}\right|_{y_i^*}\cdot u_j+\left.\frac{dN_k}{dy^*}\right|_{y_i^*}\cdot u_k\\ (\frac{d\hat{u}}{dy^*})_{y_k^*}&=\left.\frac{dN_i}{dy^*}\right|_{y_k^*}\cdot u_i+\left.\frac{dN_j}{dy^*}\right|_{y_k^*}\cdot u_j+\left.\frac{dN_k}{dy^*}\right|_{y_k^*}\cdot u_k\end{aligned} \quad .(17)$$

Prin înlocuirea relațiilor (17) în sistemul (16) rezultă ecuația matriceală elementală

$$k^{<e>}\cdot u^{<e>}=F^{<e>}\ , \quad (18)$$

unde

$$k^{<e>} = \begin{bmatrix} \int_0^{\ell} \frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* + \frac{dN_i}{dy^*}\Big|_{y_i^*} & \int_0^{\ell} \frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* + \frac{dN_j}{dy^*}\Big|_{y_i^*} & \int_0^{\ell} \frac{dN_i}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^* + \frac{dN_k}{dy^*}\Big|_{y_i^*} \\ \int_0^{\ell} \frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell} \frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* & \int_0^{\ell} \frac{dN_j}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^* \\ \int_0^{\ell} \frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_i}{dy^*}dy^* - \frac{dN_i}{dy^*}\Big|_{y_k^*} & \int_0^{\ell} \frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_j}{dy^*}dy^* - \frac{dN_j}{dy^*}\Big|_{y_k^*} & \int_0^{\ell} \frac{dN_k}{dy^*}\frac{dN_k}{dy^*}dy^* - \frac{dN_k}{dy^*}\Big|_{y_k^*} \end{bmatrix},$$

$$u^{<e>} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}, \quad F^{<e>} = \begin{bmatrix} \int_0^{\ell} N_i P^* dy^* \\ \int_0^{\ell} N_j P^* dy^* \\ \int_0^{\ell} N_k P^* dy^* \end{bmatrix}.$$

Termenul $k^{<e>}$ al acestei ecuaţii reprezintă **matricea de rigiditate** sau (matricea caracteristică) pentru elementul e, termenul $u^{<e>}$ este vectorul vitezelor nodale (necunoscute), iar $F^{<e>}$ este termenul liber. Ecuaţia (18) constituie nucleul de bază în determinarea modelului global cu elemente finite care să descrie comportarea fluidului.

Rezolvare numerică în MathCAD

Cazul I. Considerăm cazul mişcării unui fluid, pentru un element finit, la presiune constantă.

ORIGIN≡ 1

Numărul de elemente finite: n := 1

Număr noduri: nnod := 3

Lungimea elementului finit: lu := 1

Presiunea:

P(y) := 1

Funcțiile de formă:

$$N0(y) := \left(1 - 2\cdot\frac{y}{lu}\right)\cdot\left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N1(y) := 4\cdot\frac{y}{lu}\cdot\left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N2(y) := \frac{-y}{lu}\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{y}{lu}\right)$$

Matricea de rigiditate unitară (matricea caracteristică unitară):

$$k_{1,1} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N0(y)\right) dy$$

$$k_{2,2} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right) dy$$

$$k_{3,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N2(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right) dy$$

$$k_{1,2} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right) dy$$

$$k_{2,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right) dy$$

$$k_{1,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right) dy$$

$$k_{2,1} := k_{1,2} \quad k_{3,1} := k_{1,3} \quad k_{3,2} := k_{2,3}$$

$$k = \begin{pmatrix} 2.333 & -2.667 & 0.333 \\ -2.667 & 5.333 & -2.667 \\ 0.333 & -2.667 & 2.333 \end{pmatrix}$$

Matricea caracteristică globală:

$$ks := k$$

Impunerea condiţiilor la limită:

$$ks_{1,1} := 1 \quad ks_{1,2} := 0 \quad ks_{1,3} := 0$$

$$ks_{3,1} := 0 \quad ks_{3,2} := 0 \quad ks_{3,3} := 1$$

$$ks_{2,1} := 0 \quad ks_{2,3} := 0$$

Matricea termenilor liberi:

$$Tl := \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^1 N1(y) \cdot P(y)\, dy - \int_0^1 \left(\frac{d}{dy} N1(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N2(y)\right) dy \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matricea sistemului şi matriceca termenilor liberi:

$$ks = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Tl = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.667 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcularea vitezelor în cele 3 noduri:

$$u := ks^{-1} \cdot Tl \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.625 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Introducând vectorul înălţimilor nodale

$$dim^T = (0 \quad 0.5 \quad 1)$$

obţinem în Figura 2 vitezele fluidului în cele 3 noduri ale elementului finit.

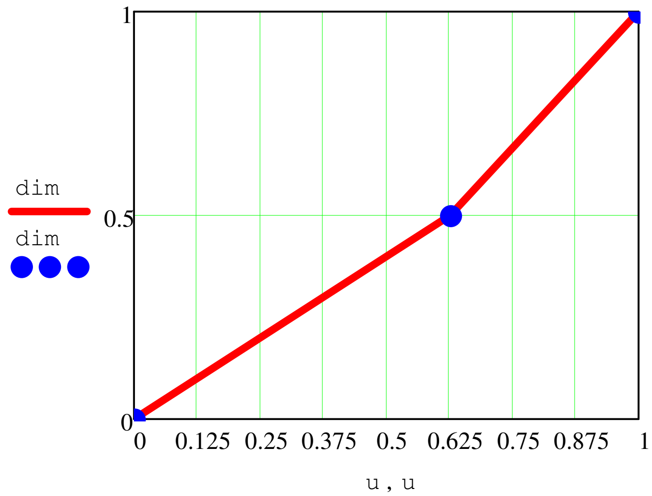


Figura 2. Viteza fluidului în cele 3 noduri, la presiunea constantă $P = 1$.

Observații. În cazul în care presiunea este zero, se observă o variație liniară a vitezelor nodale, $u_1 = 0$, $u_2 = 0.5$, $u_3 = 1$ (Figura 3).

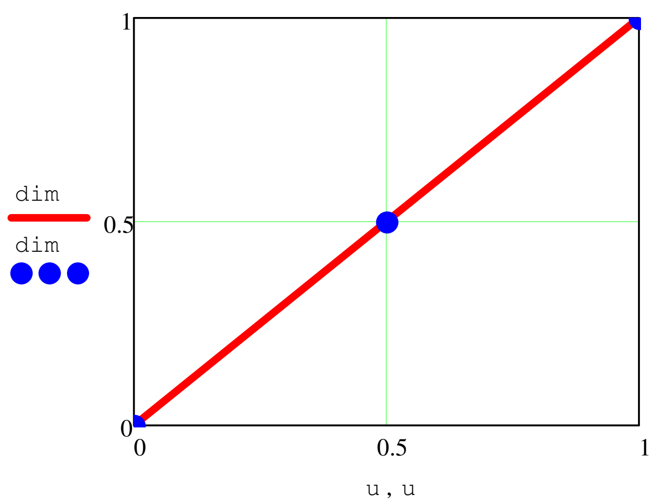


Figura 3. În cazul presiunii nule, $P = 0$, se observă o variație liniară a vitezelor nodale.

Prezentăm în continuare profilele de viteză pentru câteva valori pozitive ale presiunii.

$P(y) := 10 \qquad u^T = (0 \quad 1.75 \quad 1)$

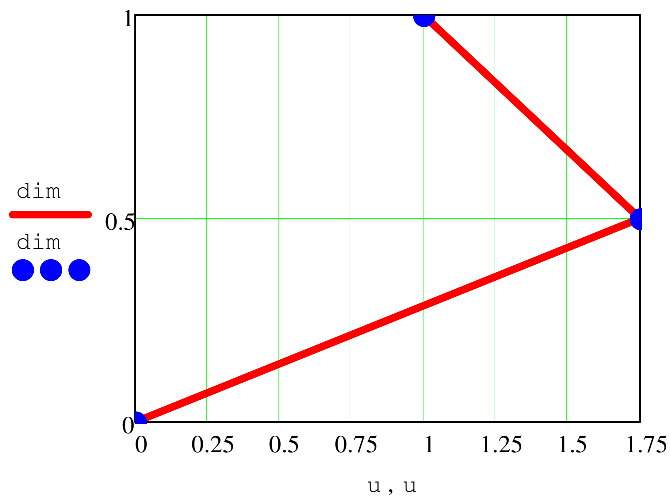


Figura 4. Profilul vitezelor, pentru o presiune pozitivă constantă $P = 10$.

$P(y) := 20 \qquad u^T = (0 \quad 3 \quad 1)$

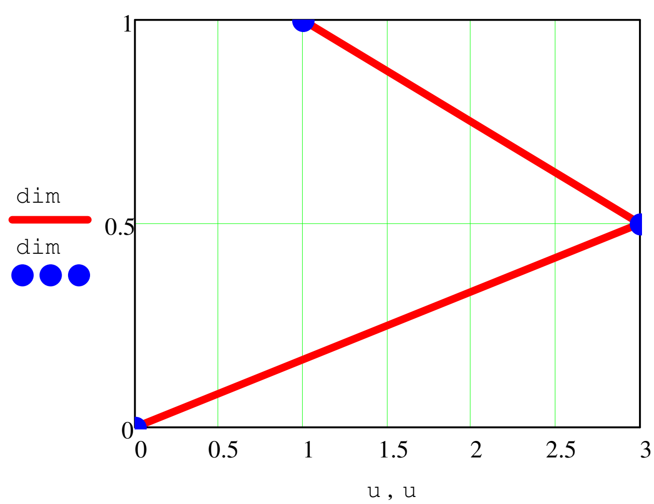


Figura 5. Profilul vitezelor, pentru o presiune pozitivă constantă $P = 20$.

La presiuni negative profilele vitezelor se modifică. Prezentăm mai jos câteva exemple.

$P(y) := -1 \quad u^T = (0 \quad 0.375 \quad 1)$

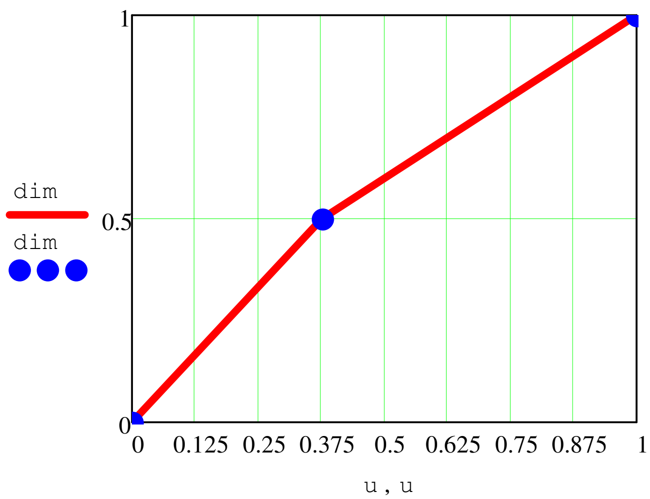


Figura 6. Profilul vitezelor, pentru o presiune negativă constantă $P = -1$.

$P(y) := -10 \quad u^T = (0 \quad -0.75 \quad 1)$

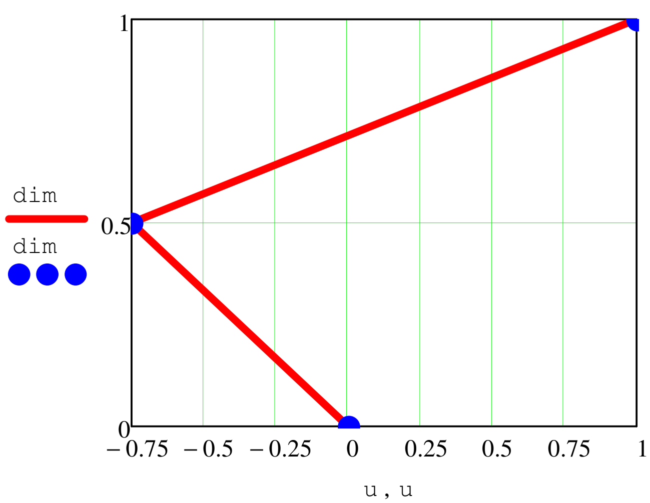


Figura 7. Profilul vitezelor, pentru o presiune negativă constantă $P = -10$.

Cazul II. Considerăm cazul mişcării fluidului, pentru două elemente finite, la presiune constantă.

$ORIGIN \equiv 1$

Numărul de elemente finite: $n := 2$

Număr noduri: $nnod := 5$

Lungimea elementului finit: $lu := \frac{1}{n}$

Presiunea: $P(y) := 2$

Funcţiile de formă:

$$N0(y) := \left(1 - 2 \cdot \frac{y}{lu}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N1(y) := 4 \cdot \frac{y}{lu} \cdot \left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N2(y) := \frac{-y}{lu} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{y}{lu}\right)$$

Elementele matricei de rigiditate unitară:

$$k_{1,1} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N0(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N0(y)\right) dy \quad k_{2,2} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N1(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N1(y)\right) dy$$

$$k_{3,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N2(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N2(y)\right) dy \quad k_{1,2} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N0(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N1(y)\right) dy$$

$$k_{2,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N1(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N2(y)\right) dy \quad k_{1,3} := \int_0^{lu} \left(\frac{d}{dy} N0(y)\right) \cdot \left(\frac{d}{dy} N2(y)\right) dy$$

$$k_{2,1} := k_{1,2} \quad k_{3,1} := k_{1,3} \quad k_{3,2} := k_{2,3}$$

Matricea caracteristică unitară:

$$k = \begin{pmatrix} 4.667 & -5.333 & 0.667 \\ -5.333 & 10.667 & -5.333 \\ 0.667 & -5.333 & 4.667 \end{pmatrix}$$

Asamblarea matricei sistemului:

$$kv := \mathrm{augment}\left[k, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \qquad kv = \begin{pmatrix} 4.667 & -5.333 & 0.667 & 0 & 0 \\ -5.333 & 10.667 & -5.333 & 0 & 0 \\ 0.667 & -5.333 & 4.667 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k1 := \mathrm{augment}\left[kv^{T}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \quad k1 = \begin{pmatrix} 4.667 & -5.333 & 0.667 & 0 & 0 \\ -5.333 & 10.667 & -5.333 & 0 & 0 \\ 0.667 & -5.333 & 4.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ 0 & 0 & k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ 0 & 0 & k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{pmatrix} \quad k2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.667 & -5.333 & 0.667 \\ 0 & 0 & -5.333 & 10.667 & -5.333 \\ 0 & 0 & 0.667 & -5.333 & 4.667 \end{pmatrix}$$

$$kf := k1 + k2 \qquad mc := kf$$

$$mc = \begin{pmatrix} 4.667 & -5.333 & 0.667 & 0 & 0 \\ -5.333 & 10.667 & -5.333 & 0 & 0 \\ 0.667 & -5.333 & 9.333 & -5.333 & 0.667 \\ 0 & 0 & -5.333 & 10.667 & -5.333 \\ 0 & 0 & 0.667 & -5.333 & 4.667 \end{pmatrix}$$

Matricea termenilor liberi:

$$\mathtt{T1} := \begin{pmatrix} \int_0^{lu} \mathtt{N0(y)\cdot P(y)}\,dy \\ \int_0^{lu} \mathtt{N1(y)\cdot P(y)}\,dy \\ \int_0^{lu} \mathtt{N2(y)\cdot P(y)}\,dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{T2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^{lu} \mathtt{N0(y)\cdot P(y)}\,dy \\ \int_0^{lu} \mathtt{N1(y)\cdot P(y)}\,dy \\ \int_0^{lu} \mathtt{N2(y)\cdot P(y)}\,dy \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{T1} = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.667 \\ 0.167 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{T2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.167 \\ 0.667 \\ 0.167 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{T} := \mathtt{T1} + \mathtt{T2} \qquad \mathtt{T} = \begin{pmatrix} 0.167 \\ 0.667 \\ 0.333 \\ 0.667 \\ 0.167 \end{pmatrix}$$

Impunerea condiţiilor la limită:

$\mathtt{mfc} := \mathtt{mc}$ $\mathtt{mfc}_{1,1} := 1$ $\mathtt{mfc}_{1,2} := 0$ $\mathtt{mfc}_{1,3} := 0$ $\mathtt{mfc}_{2,1} := 0$

$\mathtt{mfc}_{5,3} := 0$ $\mathtt{mfc}_{5,4} := 0$ $\mathtt{mfc}_{5,5} := 1$ $\mathtt{mfc}_{3,1} := 0$

$\mathtt{Tc} := \mathtt{T}$ $\mathtt{Tc}_1 := 0$ $\mathtt{Tc}_5 := 1$

$\mathtt{Tc}_3 := -\mathtt{mc}_{3,5} + \mathtt{Tc}_3$ $\mathtt{Tc}_4 := -\mathtt{mc}_{4,5} + \mathtt{Tc}_4$

$\mathtt{mfc}_{3,5} := 0$ $\mathtt{mfc}_{4,5} := 0$

Matricea sistemului şi matricea termenilor liberi după impunerea condiţiilor la limită:

$$\mathtt{mfc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.667 & -5.333 & 0 & 0 \\ 0 & -5.333 & 9.333 & -5.333 & 0 \\ 0 & 0 & -5.333 & 10.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{Tc} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.667 \\ -0.333 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculul vitezelor nodale:

$$u := mfc^{-1} \cdot Tc \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.438 \\ 0.75 \\ 0.937 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Introducând vectorul înălțimilor nodale

$$dim^T = (0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1)$$

obținem următorul profil pentru vitezele nodale, reprezentat în Figura 8

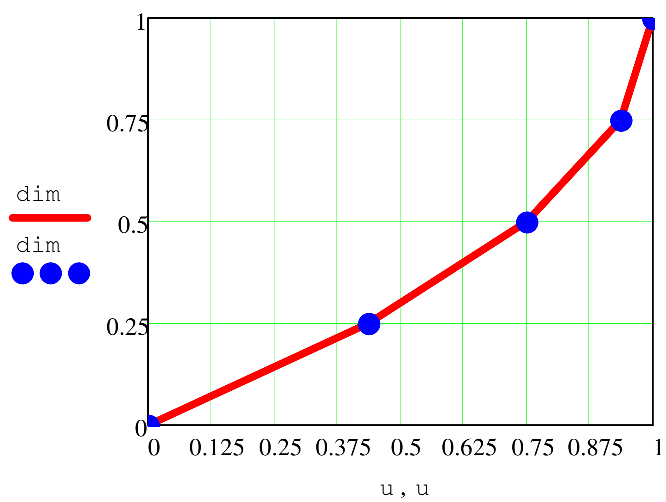


Figura 8. Profilul vitezelor în cele 5 noduri, pentru o presiune constantă $P = 2$.

Pentru o presiune negativă $P = -3$ se obțin următoarele viteze (Figura 9)

$$P(y) := -3 \qquad u^T = (0 \quad -0.031 \quad 0.125 \quad 0.469 \quad 1),$$

iar în cazul presiunii nule se poate constata variația liniară a vitezelor nodale (Figura 10), valorile vitezelor fiind

$$P(y) := 0 \qquad u^T = (0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1).$$

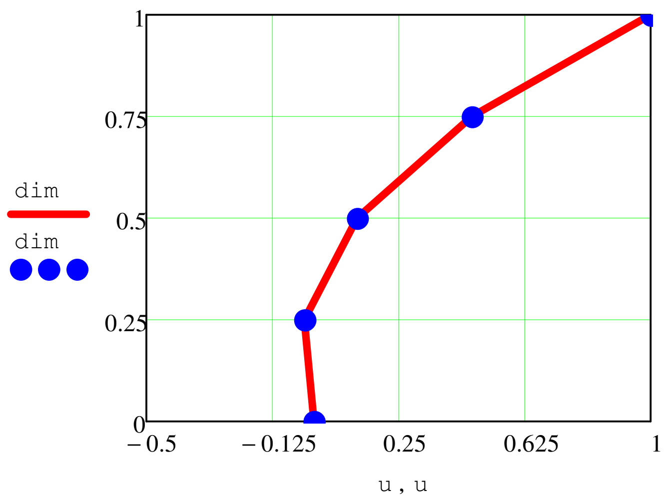


Figura 9. Profilul vitezelor în cele 5 noduri, la o presiune negativă $P = -3$.

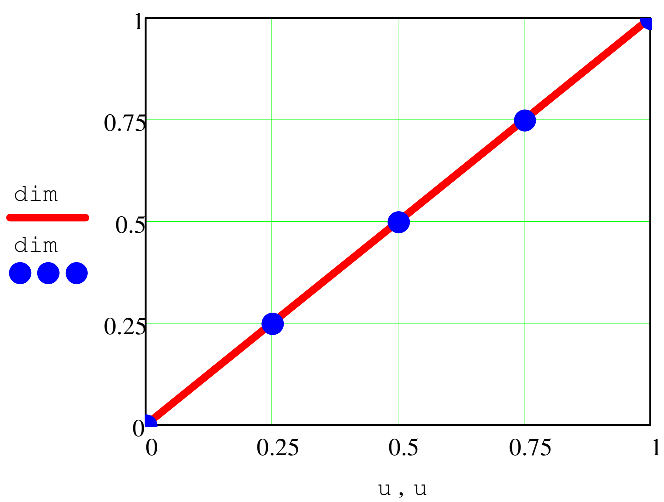


Figura 10. Variația liniară a vitezelor în cele 5 noduri, la presiunea $P = 0$.

Bineînțeles, prin sporirea numărului de elemente finite considerate pentru discretizarea domeniului, se pot obține profile de viteze din ce în ce mai clare.

Cazul III. Următorul program calculează vitezele fluidului considerând trei elemente finite, la presiune constantă.

ORIGIN$\equiv 1$

Lungimea elementului finit: $lu := \frac{1}{3}$

Presiunea: $P(y) := 10$

Funcțiile de formă:

$$N0(y) := \left(1 - 2\cdot\frac{y}{lu}\right)\cdot\left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N1(y) := 4\cdot\frac{y}{lu}\cdot\left(1 - \frac{y}{lu}\right)$$

$$N2(y) := \frac{-y}{lu}\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{y}{lu}\right)$$

Elementele matricei de rigiditate unitară:

$$k_{1,1} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)dy \quad k_{2,2} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)dy$$

$$k_{3,3} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right)dy \quad k_{1,2} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)dy$$

$$k_{2,3} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N1(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right)dy \quad k_{1,3} := \int_0^{lu}\left(\frac{d}{dy}N0(y)\right)\cdot\left(\frac{d}{dy}N2(y)\right)dy$$

$$k_{2,1} := k_{1,2} \quad k_{3,1} := k_{1,3} \quad k_{3,2} := k_{2,3}$$

Matricea caracteristică unitară:

$$k = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Asamblarea elementelor în matricea de rigiditate

Dimensionarea matricei de rigiditate:

$$KF := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..7 \\ \quad \text{for } j \in 1..7 \\ \quad\quad KF_{i,j} \leftarrow 0 \\ KF \end{array} \right. \qquad KF = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asamblarea primului element:

$k1 := k$

$i := 1..3$

$j := 1..3$

$KF_{i,j} := KF_{i,j} + k1_{i,j}$

$$KF = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asamblare al doilea element:

$k2 := k$

$i := 3..5$

$j := 3..5$

$KF_{i,j} := KF_{i,j} + k2_{i-2,j-2}$

$$KF = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asamblare al treilea element:

$k3 := k$

$i := 5 .. 7$

$j := 5 .. 7$

$KF_{i,j} := KF_{i,j} + k3_{i-4,\,j-4}$

$$KF = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Matricea sistemului

$MFC := KF$

$$MFC = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Asamblarea matricei termenilor liberi:

$$T1 := \begin{pmatrix} \int_0^{lu} N0(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N1(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N2(y)\cdot P(y)\,dy \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_0^{lu} N0(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N1(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N2(y)\cdot P(y)\,dy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \int_0^{lu} N0(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N1(y)\cdot P(y)\,dy \\ \int_0^{lu} N2(y)\cdot P(y)\,dy \end{pmatrix}$$

$$T := T1 + T2 + T3 \qquad T = \begin{pmatrix} 0.556 \\ 2.222 \\ 1.111 \\ 2.222 \\ 1.111 \\ 2.222 \\ 0.556 \end{pmatrix}$$

Condițiile la limită:

$$MFC_{1,1} := 1 \quad MFC_{1,2} := 0 \quad MFC_{1,3} := 0$$

$$MFC_{7,5} := 0 \quad MFC_{7,6} := 0 \quad MFC_{7,7} := 1$$

$$Tc := T \quad Tc_1 := 0 \quad Tc_7 := 1$$

$$Tc_5 := -MFC_{5,7} + Tc_5 \quad Tc_6 := -MFC_{6,7} + Tc_6$$

$$MFC_{5,7} := 0 \quad MFC_{6,7} := 0$$

$$MFC_{2,1} := 0 \quad MFC_{3,1} := 0$$

Matricea sistemului şi matricea termenilor liberi după impunerea condițiilor la limită:

$$MFC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Tc = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.222 \\ 1.111 \\ 2.222 \\ 0.111 \\ 10.222 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculul vitezelor nodale:

$$u := MFC^{-1} \cdot Tc \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.861111111111111 \\ 1.444444444444442 \\ 1.750000000000003 \\ 1.777777777777776 \\ 1.527777777777783 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Introducând vectorul înălțimilor nodale

$$dim^T = (0 \quad 0.167 \quad 0.333 \quad 0.5 \quad 0.667 \quad 0.833 \quad 1)$$

obținem reprezentarea grafică din Figura 11

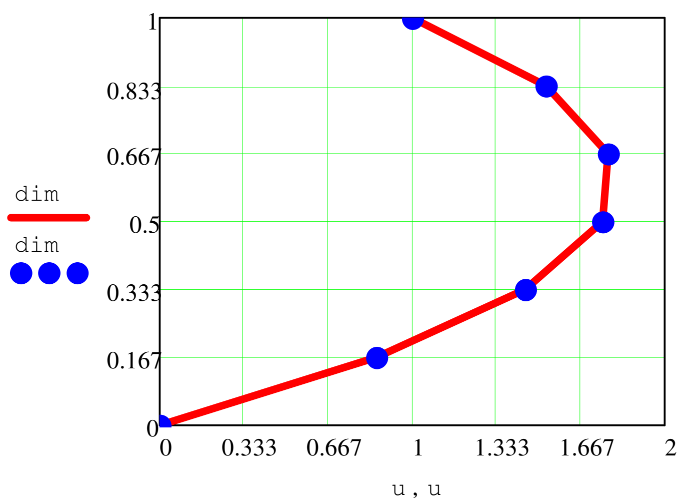


Figura 11. Profilul vitezelor în cele 7 noduri, la presiunea $P = 10$.

În cazul în care presiunea este zero, se obțin următoarele valori ale vitezelor nodale, reprezentate grafic în Figura 12

$$P(y) := 0 \qquad u^T = (0 \quad 0.167 \quad 0.333 \quad 0.5 \quad 0.667 \quad 0.833 \quad 1)$$

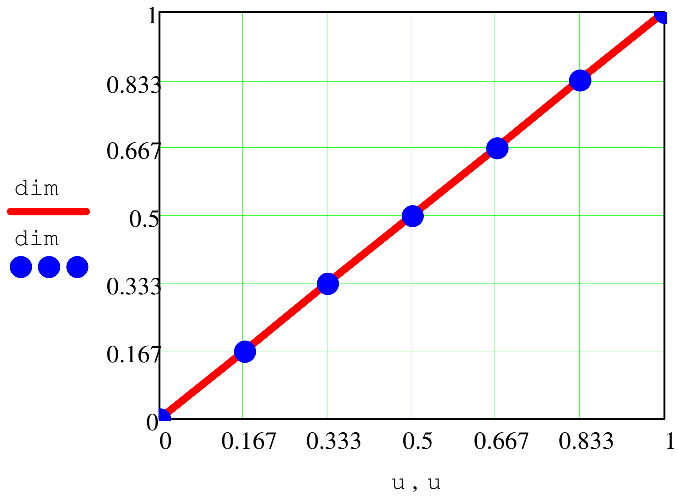


Figura 12. Variația liniară a vitezelor în cele 7 noduri, la presiunea $P = 0$.

Pentru o presiune negativă constantă, de exemplu $P = -15$ se obțin următoarele viteze nodale, reprezentate în Figura 13

$$P(y) := -15 \quad u^T = (0 \quad -0.875 \quad -1.333 \quad -1.375 \quad -1 \quad -0.208 \quad 1)$$

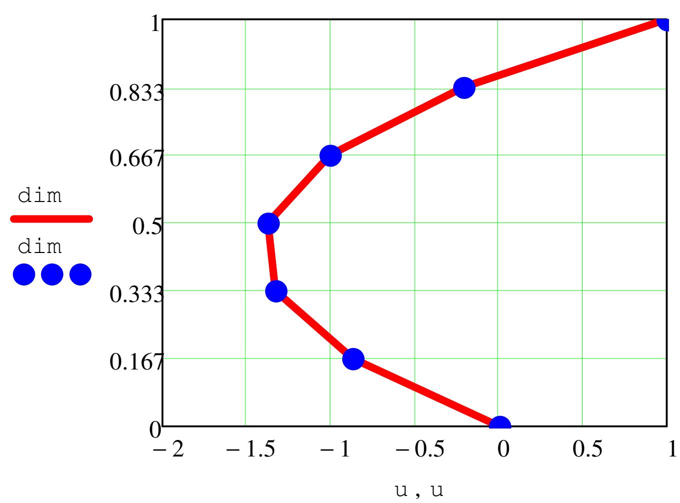


Figura 13. Profilul vitezelor în cele 7 noduri, la presiunea $P = -15$.

§2.6 TRANSFERUL DE CĂLDURĂ ÎN BARĂ

Se consideră o bară subțire de lungime L, situată pe axa reală Ox. Bara este supusă la încălzire. Dacă variațiile temperaturii nu sunt mari şi nu apar modificări ale structurii sau reacții chimice, atunci putem afirma că densitatea ρ (kg/m^3), căldura specifică c (J/kg·grad) şi coeficientul de conducție termică λ (W/m·grad) nu sunt dependente de timp. În toate punctele unui segment, temperatura este $T = T(x, t)$. Notăm cu A aria şi cu P perimetrul secțiunii, amândouă fiind constante.

Fie elementul $< e >= [x, x + \Delta x]$ de lungime Δx.

Principiul conservării energiei termice este

$$\Delta Q = \Delta Q_c + \Delta Q_e + \Delta Q_v,$$

unde

ΔQ este variația cantității de căldură în elementul e;

ΔQ_c este cantitatea de căldură care penetrează prin secțiunile x şi $x + \Delta x$ (prin conducție, conform legii lui Fourier, cu coeficientul $\lambda(x)$);

ΔQ_e este cantitatea de căldură care penetrează elementul e pe suprafața laterală (schimb de căldură prin convecție, are loc o schimbare de căldură, conform legii lui Newton cu coeficientul $\alpha(x)$ între bară şi mediul înconjurător);

ΔQ_v este cantitatea de căldură provenită din interior (cu $q(x, t)$ densitatea unitară timp-volum).

Se obține

$$A\int_x^{x+\Delta x} c\rho\frac{\partial T}{\partial t}ds = A\left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_x + \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x}\right] - P\int_x^{x+\Delta x}\alpha(T - T_e)ds + A\int_x^{x+\Delta x} q_v(s,t)ds \quad (1)$$

unde $\lambda > 0$, $\alpha > 0$.

Primul termen din membrul drept poate fi scris în forma

$$\left[\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x}+\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x}\right]=\int_{x}^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial s}(\lambda\frac{\partial T}{\partial s})ds\,. \qquad (2)$$

Aplicând în continuare formula de medie

$$\int_a^b F(x)dx=(b-a)F(\xi) \quad ,\ a<\xi<b\ , \qquad (3)$$

pentru $\Delta x \to 0$ se obține ecuația de conducție a căldurii în bara subțire (în care s-a notat $\ell = A/P$)

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x})-\frac{\alpha(x)}{\ell}(T-T_e)+q_v(x,t)=0\,. \quad (4)$$

În condiții staționare, ecuația de conducție a căldurii în bara subțire trebuie să fie de forma

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)-\frac{\alpha(x)}{\ell}\left(T-T_e\right)+q_v(x)=0\ ,\ x\in(0,L)\ , \quad (5)$$

$$\lambda(x)>0\,,\ \alpha(x)\geq 0\ ,\ x\in[0,L]\ .$$

I. <u>Analiza</u> <u>transferului</u> <u>de</u> <u>căldură</u>.

Problema revine la determinarea funcției T care satisface ecuația şi condiția de limită bilocală

$$-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)+\frac{\alpha(x)}{\ell}T(x)=q_v(x) \quad , \quad x\in(0,a) \quad (6)$$

$$\lambda(0)T'(0)=\alpha_1\left[T(0)-T_C\right]\ ,\ \ \alpha_1>0 \qquad (7)$$

$$\lambda(a)T'(a)=\alpha_2\left[T_S-T(a)\right]\ ,\ \ \alpha_2>0 \qquad (8)$$

$$\lambda(x)\geq\lambda_0>0\ ,\ \alpha(x)\geq\alpha_0>0\,, \qquad (9)$$

$q_v(x)$ funcție dată care înlocuieşte $q_v(x)+\alpha(x)\cdot T_e/\ell$.

Se introduc funcțiile u, f şi constantele $\tilde{A}$ şi B, de expresii

$$u(x) = T(x) - \tilde{A}x - B \ , \qquad (10)$$

$$f(x) = q_v(x) + \tilde{A}\lambda(x) - \frac{\alpha(x)}{\ell}\left(\tilde{A}x + B\right), \qquad (11)$$

$$\tilde{A} = \frac{\alpha_1\alpha_2\left(T_s - T_c\right)}{\alpha_1\left[\lambda(a) + a\alpha_2\right] + \alpha_2\lambda(0)} \ , \qquad (12)$$

$$B = \lambda(0)\frac{\alpha_2\left(T_s - T_c\right)}{\alpha_1\left[\lambda(a) + a\alpha_2\right] + \alpha_2\lambda(0)} + T_c \ . \qquad (13)$$

Problema revine la determinarea funcției u(x) care verifică ecuația şi condițiile de limită omogene

$$\begin{cases} A_I u(x) = -\dfrac{d}{dx}\left(\lambda(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)\cdot u(x) = f(x) \ , \quad x \in (0,a) & (14) \\ \lambda(0)\cdot u'(0) - \alpha_1 \cdot u(0) = 0 \ , & (15) \\ \lambda(a)\cdot u'(a) + \alpha_2 \cdot u(a) = 0 \ . & (16) \end{cases}$$

Considerăm că $u \in C^2(0,a) \cap C^1[0,a]$ unde

$$\alpha_1 > 0 \ , \ \alpha_2 > 0 \ , \ \lambda(x) > 0 \ , \ q(x) = \frac{\alpha(x)}{\ell} \geq 0 ,$$

f(x) este funcția dată şi A_I este operatorul Sturm – Liouville.

Operatorul Sturm – Liouville este definit astfel

$$A_I : D(A_I) \subset C^1[0,a] ,$$

unde domeniul $D(A_I)$ este

$$D\left(A_I\right) = \left\{u \middle| u \in C^2(0,a) \cap C^1(0,a)\right\},$$

cu condițiile (15), (16) şi $f \in C[0,a]$, $\lambda(x) \in C^1[0,a]$, $q(x) \in C[0,a]$.

Operatorul A_I este liniar, închis, limitat (continuu) în intervalul $\| \ . \ \| C^2(0,a)$ şi autoadjunct pe $D(A_I)$, astfel încât

$$\int_0^a vA_I u\,dx = \int_0^a uA_I v\,dx \quad , \quad u, v \in D(A_I). \qquad (17)$$

II. Rezolvarea Galerkin pentru aproximarea clasică a soluției

Rezolvarea Galerkin poate fi aplicată pentru determinarea unei aproximări analitice a soluției clasice $u \in D(A_I)$, pentru problema (14) – (16). Procedura de aproximare constă în considerarea unei funcții aproximative $u_N \in D(A_I)$, care verifică condițiile (15) – (16), dar nu verifică ecuația diferențială (14), având forma

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \quad , \quad \varphi_k \in D(A_I) \quad , \quad c_k \in R^1, \quad (18)$$

c_k fiind constante necunoscute şi φ_k un sistem de funcții în spațiul $n+1$ dimensional care trebuie să respecte condițiile

$\varphi_k \in D(A_I)$,

φ_k sunt liniar independente,

φ_k , $k = \overline{0,n}$ formează un sistem complet de funcții $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ în $D(A_I)$.

Ecuațiile Galerkin pentru problema (14) – (16) sunt

$$\int_0^a \left[-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{du_N}{dx}\right) + \frac{\alpha(x)}{\ell} u_N(x) - f(x) \right] \varphi_j(x)\,dx = 0 \ , \ j = \overline{0,n} \, ,$$

care după înlocuirea lui u_N cu (18) conduc la ecuațiile

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \int_0^a \left[-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{d\varphi_k}{dx}\right) + \frac{\alpha(x)}{\ell} \varphi_k(x) \right] \varphi_j(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,\varphi_j(x)\,dx \, , \ j = \overline{0,n} \quad (19)$$

Cu notațiile

$$a_{jk} = \int_0^a \left[-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{d\varphi_k}{dx}\right) + \frac{\alpha(x)}{\ell} \varphi_k(x) \right] \varphi_j(x)\,dx \, , j, \ k = \overline{0,n} \qquad (20)$$

$$b_j = \int_0^a f(x)\,\varphi_j(x)\,dx \;,\; j = \overline{0,n} \tag{21}$$

unde

$$\lambda(0)\,\varphi_j'(0) = \alpha_1\,\varphi_j(0),$$

$$\lambda(a)\,\varphi_j'(a) = -\alpha_2\,\varphi_j(a),$$

va rezulta sistemul liniar în necunoscutele c_k

$$\sum_{k=0}^{n} a_{jk}\,c_k = b_j\,,\; j = \overline{0,n}. \tag{22}$$

Deoarece $a_{jk} = a_{kj}$, matricea $M = [a_{jk}]$ a sistemului (22) este reală şi simetrică, iar conform teoriei, sistemul algebric (22) are soluție unică.

Coloanele matricei sunt introduse de relațiile

$$\tilde{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_n)^T \quad , \quad \tilde{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_n)^T \tag{23}$$

T indicând transpusa matricei. Sistemul algebric Galerkin (22) se scrie în formă matriceală

$$X\,\tilde{c} = \tilde{b}. \tag{24}$$

Se aleg funcțiile de formă

$$\varphi_0(x) = x^2(x-b)\;,\; b = a\left(1 + \frac{\lambda(a)}{2\lambda(a) + a\alpha_2}\right)$$

$$\varphi_1(x) = (a-x)^2(x+c)\;,\; c = \frac{a\lambda(0)}{2\lambda(0) + a\alpha_1} \tag{25}$$

$$\varphi_k(x) = x^k(a-x)^2,\; k = 2, 3, \ldots, n.$$

Propoziția 1. *Funcțiile* φ_k *din (25) verifică condiția* $\varphi_k \in D(A_I)$.

Propoziția 2. *Sistemul de funcții* $(\varphi_k)_{k=0}^{n}$ *dat de* (25) *este liniar independent pe intervalul* [0, a].

Demonstrație. Este ușor de demonstrat că funcțiile φ_k, $k=\overline{0,n}$ nu formează nici o combinație liniară. Presupunem că d_k sunt constante nu toate nule și că există o relație de forma

$$d_0 \cdot \varphi_0(x) + d_1 \cdot \varphi_1(x) + \sum_{k=2}^{n} d_k \cdot \varphi_k(x) \equiv 0 \ , \ \forall x \in [0,a] \quad (26)$$

Înlocuind expresiile funcțiilor φ_i, $i=\overline{0,n}$ conform relației (25), identitatea devine

$$P_{n+2}(x) = a^2 c d_1 + c d_1 (a-2c)x + \left[-bd_0 + (c-2a)d_1 + a^2 d_2\right] \cdot x^2 +$$

$$+\left(d_0 + d_1 - 2ad_2 + a^2 d_3\right)x^3 + \sum_{s=4}^{n}\left(a^2 d_s - 2ad_{s-1} + d_{s-2}\right) \cdot x^s +$$

$$+\left(d_{n-1} - 2ad_n\right)x^{n+1} + d_n x^{n+2} = 0 \ , \ \forall x \in [0,a] \ . \quad (27)$$

Dacă se consideră că polinomul $P_{n+2}(x)$ are o infinitate de rădăcini pe $[0,a]$ atunci, conform unei teoreme algebrice, acest polinom este egal cu 0. De aceea se impun condițiile

$$\begin{aligned}
& d_1 = 0, \\
& -bd_0 + a^2 d_2 = 0, \\
& d_0 - 2ad_2 + a^2 d_3 = 0, \\
& d_{s-2} - 2ad_{s-1} + a^2 d_s = 0, \ s = \overline{4,n} \qquad (28) \\
& d_{n-1} - 2ad_n = 0, \\
& d_n = 0,
\end{aligned}$$

de unde rezultă $d_n = 0, d_{n-1} = 0, \ldots, d_2 = 0, d_1 = 0, d_0 = 0$.

Propoziția 3. *Sistemul de funcții* $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ *dat de relațiile (25) este complet în* $D(A_I)$.

Aceasta înseamnă că pentru $\forall \varepsilon > 0$ în combinația liniară dată de funcțiile (18) poate fi găsit numărul n şi constantele c_k astfel încât

$$|u(x) - u_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad |u'(x) - u'_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall u \in D(A_I)\,.$$

Aplicație. Să se determine temperatura unei bare cilindrice, rigide, care are capetele fixate în pereți cu aceeaşi temperatură T_c şi care conține surse interioare de căldură (Figura 1). Lungimea barei este de $L = 1$ m şi raza $r = 0.01$ m. În acest caz vom avea $\ell = A/P = 1/200$ m.

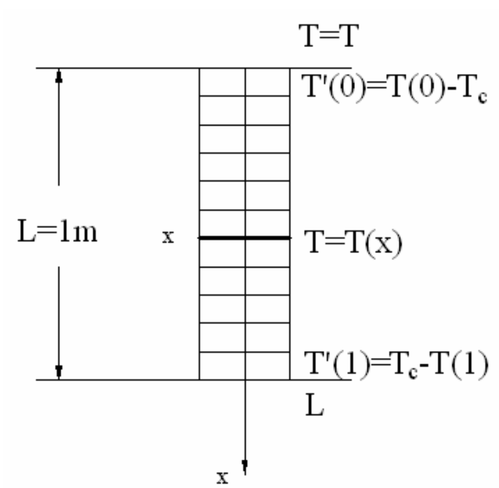


Figura 1. Bară cilindrică, rigidă, cu surse interioare de căldură.

Vom considera următoarele funcții

$$\lambda(x) = \lambda_0 e^x\,,\ \ q(x) = \frac{\alpha(x)}{\ell} = q_0 x\,,\ \ q_v(x) = q_{v0} x\,,\ \ x \in [0,1]\,.$$

Presupunând că $T_c = T_s$ când $u(x) = T(x) - T_c$, se poate considera că $f(x) = f_0 x$, $x \in [0,1]$, unde $f_0 = q_{v0} - q_0 T_c$.

Rezolvare numerică în MathCAD

Datele inițiale:

$$\lambda 0 := 30 \quad q0 := 100 \quad f0 := 5 \quad a := 1$$

Lungimea barei:

$$lu := \frac{1}{200}$$

Considerăm funcțiile:

$$\alpha(x) := lu \cdot q0 \cdot x$$

$$f(x) := f0 \cdot x$$

$$\lambda(x) := \lambda 0 \cdot e^{x}$$

şi

$$\alpha 1 := \lambda(0) \qquad \alpha 2 := \lambda(a)$$

$$b := a \cdot \left(1 + \frac{\lambda(a)}{2 \cdot \lambda(a) + a \cdot \alpha 2}\right)$$

$$c := a \cdot \frac{\lambda(0)}{2 \cdot \lambda(0) + a \cdot \alpha 1}$$

Fie funcțiile de formă

$$\phi 0\ (x) := x^{2}(x - b)$$

$$\phi 1\ (x) := (a - x)^{2}(x + c)$$

$$\phi 2\ (x) := x^{2}(a - x)^{2}$$

Rezultă

$$at_{0,0} := \int_{0}^{a} \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x) \cdot \frac{d}{dx}\phi 0\ (x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu} \cdot \phi 0\ (x)\right] \cdot \phi 0\ (x)\ dx$$

$$at_{0,1} := \int_{0}^{a} \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x) \cdot \frac{d}{dx}\phi 1\ (x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu} \cdot \phi 1\ (x)\right] \cdot \phi 0\ (x)\ dx$$

$$at_{0,2} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi2(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi2(x)\right]\cdot\phi0(x)\,dx$$

$$at_{1,0} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi0(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi0(x)\right]\cdot\phi1(x)\,dx$$

$$at_{1,1} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi1(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi1(x)\right]\cdot\phi1(x)\,dx$$

$$at_{1,2} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi2(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi2(x)\right]\cdot\phi1(x)\,dx$$

$$at_{2,0} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi0(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi0(x)\right]\cdot\phi2(x)\,dx$$

$$at_{2,1} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi1(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi1(x)\right]\cdot\phi2(x)\,dx$$

$$at_{2,2} := \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\left(-\lambda(x)\cdot\frac{d}{dx}\phi2(x)\right) + \frac{\alpha(x)}{lu}\cdot\phi2(x)\right]\cdot\phi2(x)\,dx$$

Matricea sistemului este:

$$at = \begin{pmatrix} 21.304 & 6.495 & -0.539 \\ 6.495 & 13.644 & 1.294 \\ -0.539 & 1.294 & 1.061 \end{pmatrix}$$

Matricea termenilor liberi este:

$$b_0 := \int_0^a f(x)\,\phi0(x)\,dx \qquad b_1 := \int_0^a f(x)\,\phi1(x)\,dx$$

$$b_2 := \int_0^a f(x)\,\phi2\,(x)\,dx \qquad b = \begin{pmatrix} -0.667 \\ 0.306 \\ 0.083 \end{pmatrix}$$

Rezolvarea matriceală a sistemului:

$$c0 := at^{-1} \cdot b \qquad c0 = \begin{pmatrix} -0.044 \\ 0.043 \\ 3.279 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Funcţia aproximativă:

$$u(x) := c0_0 \phi0\,(x) + c0_1 \cdot \phi1\,(x) + c0_2 \cdot \phi2\,(x)$$

Funcţia temperatură:

$$T(x) := u(x) + 300$$

Figura 2 prezintă graficul distribuției temperaturii în bară.

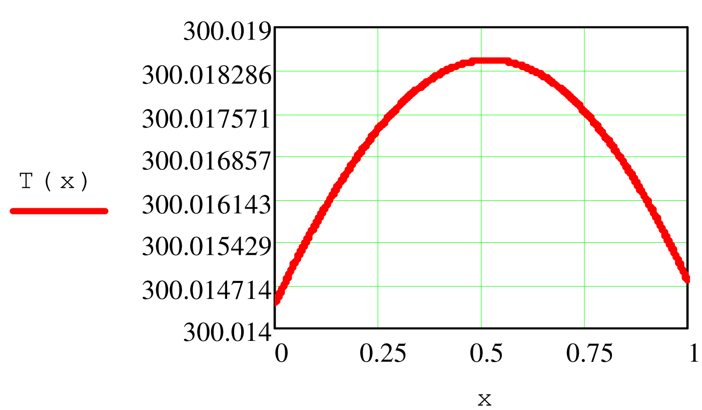


Figura 2. Graficul distribuției temperaturii în bară, simulare în MathCAD.

Rezolvare numerică în MATLAB

Programul următor calculează distribuția temperaturii în bară prin metoda Galerkin.

```
clear,clc;
  %Datele inițiale:
lamda0=30;
q0=10;
f0=5;
a=1;

  %Lungimea barei:
lu=1/200;

  %Se consideră funcțiile:
alfa=@(x)lu*q0*x;
f=@(x)f0*x;
lamda=@(x)lamda0*exp(x);

  %Considerăm:
alfa1=lamda(0);
alfa2=lamda(a);
b=a*(1+lamda(a)/(2*lamda(a)+a*alfa2));
c=a*lamda(0)/(2*lamda(0)+a*alfa1);

  %Fie funcțiile:
fi0=@(x)x^2*(x-b);
fi1=@(x)(a-x)^2*(x+c);
fi2=@(x)x^2*(a-x)^2;

  %Integranzii:

at=zeros(3);

inte00=@(x)(x.^3-4.*x.^2/3).*(10.*x.^4-40.*x.^3/3-
10.*exp(x).*(9.*x.^2+10.*x-8));
at(1,1)=quad(inte00,0,a)

inte01=@(x)(-30.*exp(x).*(-2.*(1-x).*(x+1/3)+(1-x).^2)-
30.*exp(x).*(6.*x-10/3)+10.*x.*(1-x).^2.*(x+1/3)).*x.^2.*(x-
4/3);
at(1,2)=quad(inte01,0,a)
```

```
     inte02=@(x)(-30.*exp(x).*(2.*x.*(1-x).^2-2.*x.^2.*(1-x))-
30.*exp(x).*(2.*(1-x).^2-8.*x.*(1-x)+2.*x.^2)+10.*x.^3.*(1-
x).^2).*x.^2.*(x-4/3);
     at(1,3)=quad(inte02,0,a)

     inte10=@(x)(-30.*exp(x).*(2.*x.*(x-4/3)+x.^2)-
30.*exp(x).*(6.*x-8/3)+10.*x.^3.*(x-4/3)).*(1-x).^2.*(x+1/3);
     at(2,1)=quad(inte10,0,a)

     inte11=@(x)(-30.*exp(x).*(-2.*(1-x).*(x+1/3)+(1-x).^2)-
30.*exp(x).*(6.*x-10/3)+10.*x.*(1-x).^2.*(x+1/3)).*(1-
x).^2.*(x+1/3);
     at(2,2)=quad(inte11,0,a)

     inte12=@(x)(-30.*exp(x).*(2.*x.*(1-x).^2-2.*x.^2.*(1-x))-
30.*exp(x).*(2.*(1-x).^2-8.*x.*(1-x)+2.*x.^2)+10.*x.^3.*(1-
x).^2).*(1-x).^2.*(x+1/3);
     at(2,3)=quad(inte12,0,a)

     inte20=@(x)(-30.*exp(x).*(2.*x.*(x-4/3)+x.^2)-
30.*exp(x).*(6.*x-8/3)+10.*x.^3.*(x-4/3)).*x.^2.*(1-x).^2;
     at(3,1)=quad(inte20,0,a)

     inte21=@(x)(-30.*exp(x).*(-2.*(1-x).*(x+1/3)+(1-x).^2)-
30.*exp(x).*(6.*x-10/3)+10.*x.*(1-x).^2.*(x+1/3)).*x.^2.*(1-
x).^2;
     at(3,2)=quad(inte21,0,a)
     inte22=@(x)(-30.*exp(x).*(2.*x.*(1-x).^2-2.*x.^2.*(1-x))-
30.*exp(x).*(2.*(1-x).^2-8.*x.*(1-x)+2.*x.^2)+10.*x.^3.*(1-
x).^2).*x.^2.*(1-x).^2;
     at(3,3)=quad(inte22,0,a)

     b=zeros(3,1)
     intb0=@(x)5.*x.^3.*(x-4/3);
     intb1=@(x)5.*x.*(1-x).^2.*(x+1/3);
     intb2=@(x)5.*x.^3.*(1-x).^2;

     b(1)=quad(intb0,0,a)
     b(2)=quad(intb1,0,a)
     b(3)=quad(intb2,0,a)

        %Rezolvarea matriceală a sistemului:
     c0=inv(at)*b

        %Funcţia temperatură:
     for i=0:0.01:1
```

```
    u=c0(1)*fi0(i)+c0(2)*fi1(i)+c0(3)*fi2(i)+300;
plot(i,u,'*','markersize',5);grid on;hold on
end
```

Rezultatele obținute în urma rulării sunt următoarele

```
at =
   17.6732    7.4830   -0.1823
    7.4830   12.4177    1.0439
   -0.1823    1.0439    0.9897

b =
   -0.6667
    0.3056
    0.0833

c0 =
   -0.0643
    0.0628
    0.0061
```

În Figura 3 este prezentat graficul distribuției temperaturii în bară.

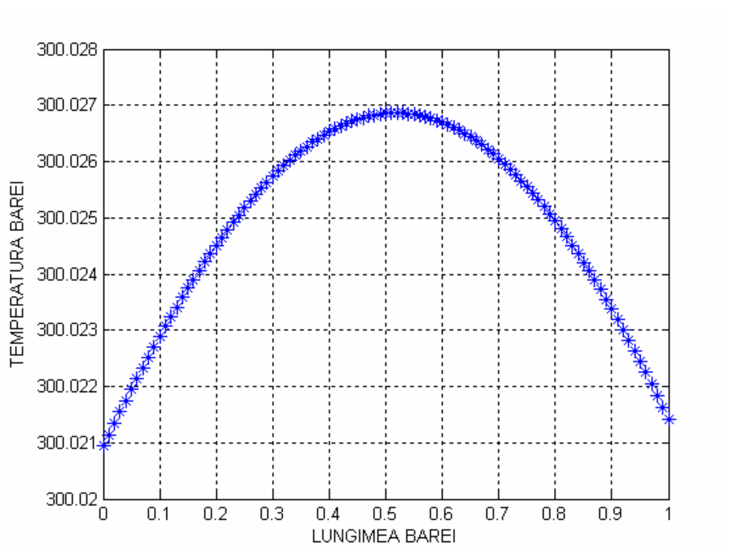


Figura 3. Graficul distribuției temperaturii în bară,

simulare în MATLAB.

§2.7 DISTRIBUȚIA TEMPERATURII ÎNTR-UN CONDUCTOR ELECTRIC

Considerăm un conductor elastic străbătut de un curent electric I constant în timp (Figura 1). O parte din energia electrică transmisă de-a lungul conductorului se trensformă prin efect Joule-Lenz în căldură, ridicând temperatura conductorului deasupra celei a mediului ambiant. Ipotezele problemei sunt următoarele:

• acțiunea termică a curentului electric poate fi descrisă prin termenul sursă q_0;

• conductorul este perfect izolat, astfel încât fluxul termic spre mediul ambiant este nul.

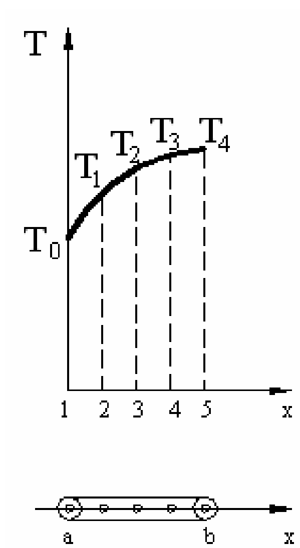


Figura 1. Conductor izolat, străbătut de curentul electric I.

Cunoscând coeficientul de conductivitate termică λ a materialului, se pune problema analizării distribuției temperaturii T de-a lungul conductorului electric, unde $T : R \to R$, $T(x)$ fiind temperatura în punctul de abscisă x.

Distribuția temparaturii T verifică ecuația diferențială

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_0 = 0\,, \qquad (1)$$

şi condiţiile la limită

$$T(x) = T_a \quad \text{dacă} \quad x = a \qquad (2)$$

$$T(x) = T_b \quad \text{dacă} \quad x = b\,, \qquad (3)$$

unde T este funcţia de temperatură, λ este coeficientul de conductivitate termică, q_0 este fluxul termic volumetric al surselor de căldură.

Problema poate fi formulată în mod echivalent aplicând calculul variaţional. Astfel, trebuie să se găsească funcţia T care minimalizează funcţionala

$$J(T) = \int_a^b \left[\frac{\lambda}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 - q_0 T \right] dx \qquad (4)$$

şi satisface condiţiile la limită (2).

Observaţie. **Teorema lui Euler.** Dacă $F(x, y, y')$ aparţine clasei C^2 pentru $x \in [x_1, x_2]$ şi y, y' luând valori arbitrare şi dacă $y(x)$ realizează un extremum relativ al integralei

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

în mulţimea funcţiilor din clasa C^2 care satisfac condiţiile la limită

$$y(x_1) = y_1\,,\; y(x_2) = y_2\,,$$

atunci y(x) verifică ecuaţia lui Euler

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0\,.$$

Deoarece

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = F''_{xy'} + F''_{yy'} y' + F''_{y'y'} y''\,,$$

ecuaţia lui Euler corespunzătoare funcţionalei, se mai poate scrie sub forma

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0 .$$

În cazul functionalei (3), avem

$$F(x,T,T') = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 - q_0 T ,$$

de unde

$$F_{T'} = \lambda T', \quad F_{T'T'} = \lambda, \quad F_{TT'} = 0, \quad F_{xT'} = 0, \quad F_T = -Q_0$$

şi prin înlocuire rezultă ecuația (1).

Figura 2 prezintă discretizarea conductorului folosind elementele finite unidimensionale de tip liniar.

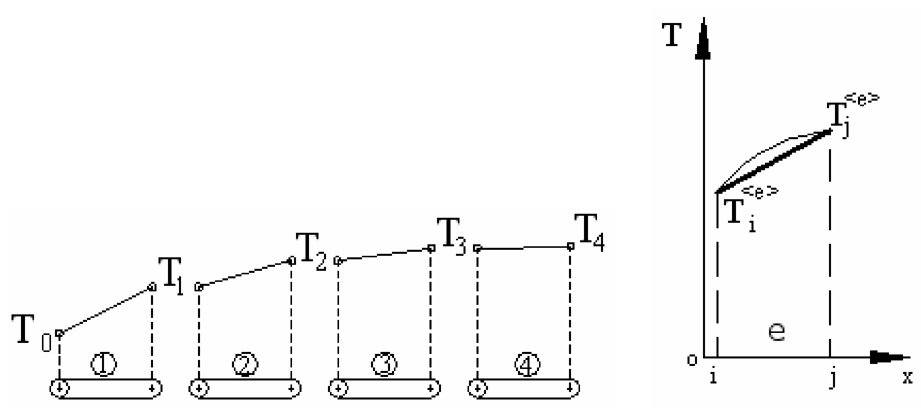


Figura 2. Discretizarea conductorului în elementele finite unidimensionale de tip liniar.

Să notăm contribuția unui elemnt finit oarecare e prin

$$J^{<e>}(T) = \int_{x_i}^{x_j}\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 - q_0 T\right]dx , \tag{5}$$

rezultând

$$J(T) = \sum_{e=1}^{4} J^{<e>}(T) . \tag{6}$$

Modelul global al distribuției de temperatură de-a lungul conductorului electric se obține în mod generativ pornind de la modelul elemental $J^{<e>}(T)$, pe care îl vom explicita în cele ce urmează.

Considerăm un element finit oarecare e, definit prin lungimea sa $\ell^{<e>} = x_j - x_i$ şi prin vectorul valorilor nodale de temperatură

$$T^{<e>} = \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Alegând de la început o variație liniară între T_i şi T_j, rezultă că funcția de interpolare a temperaturii pe acest element este

$$\hat{T}^{<e>}(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x\ , \tag{8}$$

unde coeficienții α_1 şi α_2 se determină în funcție de valorile nodale ale temperaturii

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i\ ,\ T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j\ , \tag{9}$$

în forma

$$\alpha_1 = \frac{T_i x_j - T_j x_i}{\ell^{<e>}}, \quad \alpha_2 = \frac{T_j - T_i}{\ell^{<e>}}. \tag{10}$$

Înlocuind relația (10) în (8) şi rearanjând termenii, se obține funcția

$$\hat{T}^{<e>}(x) = N_i(x)T_i + N_j(x)T_j\ , \tag{11}$$

unde T_i şi T_j sunt valorile câmpului termic în nodurile i şi j ale elementului finit considerat.

Funcțiile de interpolare

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{\ell^{<e>}}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{\ell^{<e>}} \tag{12}$$

se numesc şi funcții de formă, deoarece ele depind de forma geometrică a elementelor finite. Funcția $\hat{T}^{<e>}$ definită prin (11) se scrie de obicei sub forma

$$\hat{T}^{<e>}(x) = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = N \cdot T^{<e>} \,. \qquad (13)$$

Înlocuind (13) în (5), rezultă

$$J^{<e>}\left(T_i, T_j\right) = \int_{x_i}^{x_j} \left\{ \frac{\lambda}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \right)^2 - q_0 \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \right\} dx \,. (14)$$

Impunând condiția de staționare a funcționalei în raport cu variabilele nodale T_i și T_j, se obțin egalitățile

$$\frac{\partial J^{<e>}}{\partial T_i}\left(T_i, T_j\right) = \int_{x_i}^{x_j} \left\{ \lambda \frac{dN_i}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} - q_o N_i \right\} dx = 0 \,, \quad (15)$$

$$\frac{\partial J^{<e>}}{\partial T_j}\left(T_i, T_j\right) = \int_{x_i}^{x_j} \left\{ \lambda \frac{dN_j}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & \frac{dN_j}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} - q_o N_j \right\} dx = 0 \,. \quad (16)$$

Putem generaliza studiul considerând că λ nu este constant de-a lungul întregului conductor.

Rearanjând termenii și observând că vectorul valorilor nodale $T^{<e>}$ nu depinde de x, rezultă

$$\begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_j} \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx \\ \int_{x_i}^{x_j} \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} dx & \int_{x_i}^{x_j} \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_j} N_i q_0 dx \\ \int_{x_i}^{x_j} N_j q_0 dx \end{bmatrix} \quad (17)$$

Asamblând acum toate elementele finite din domeniul considerat, se obține modelul global

$$k^{<e>} \cdot T^{<e>} = F^{<e>} \,, \qquad (18)$$

unde matricea de rigiditate $k^{<e>}$ conține coeficientul de conductivitate termică $\lambda^{<e>}$, iar termenul liber $F^{<e>}$ conține fluxul termic volumetric $q_0^{<e>}$. Vectorul temperaturilor nodale constituie în acest caz vectorul mărimilor necunoscute ale problemei.

Aplicație. Să se determine distribuția temperaturii de-a lungul unui conductor electric realizat din cupru de lungime $L = 5\ \mathrm{m}$. Coeficientul de conductivitate termică a materialului este $\lambda = 3.73 \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm} \cdot {}^{\circ}\mathrm{C}}$. Se discretizează domeniul de analiză în n elemente finite liniare. Temperatura la cele două capete ale conductorului este $T_0 = 50\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ şi $T_2 = 60\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$.

Cazul I. Considerăm discretizarea din Figura 3, pentru $n = 2$ elemente finite liniare.

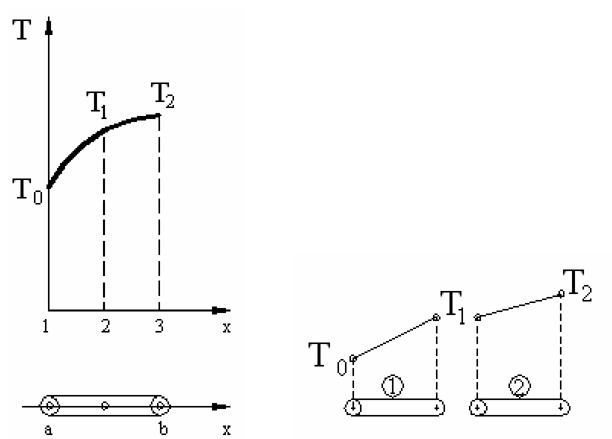


Figura 3. Discretizarea conductorului în două elemente finite liniare.

Sistemul matriceal elemental este

$$\begin{bmatrix} \int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx & \int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \\ \int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx & \int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{L}{2}} N_0 q_0 dx \\ \int_0^{\frac{L}{2}} N_1 q_0 dx \end{bmatrix}$$

unde

$$N_0(x) = \frac{x_1 - x}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2} - x}{\frac{L}{2}} = 1 - \frac{2x}{L} \quad , \; N_1(x) = \frac{x - x_0}{\frac{L}{2}} = \frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{2x}{L},$$

$$\frac{dN_0}{dx} = -\frac{2}{L} \quad , \quad \frac{dN_1}{dx} = \frac{2}{L}$$

Calculând integralele care apar în sistemul matriceal elemental, se obțin relațiile

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx = \lambda \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{2}{L}\right)\left(-\frac{2}{L}\right) dx = \frac{2\lambda}{L},$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx = \lambda \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{2}{L}\right)\frac{2}{L} dx = -\frac{2\lambda}{L},$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx = \lambda \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2}{L}\left(-\frac{2}{L}\right) dx = -\frac{2\lambda}{L},$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx = \lambda \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2}{L}\frac{2}{L} dx = \frac{2\lambda}{L},$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} N_i q_0 dx = q_0 \int_0^{\frac{L}{2}} (1-\frac{2x}{L})dx = \frac{1}{4} q_0 L \,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} N_j q_0 dx = q_0 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2x}{L} dx = \frac{1}{4} q_0 L \,.$$

Introducând aceste rezultate în sistemul matriceal rezultă modelul numeric elemental

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{L} & -\frac{2\lambda}{L} \\ -\frac{2\lambda}{L} & \frac{2\lambda}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} q_0 L \\ \frac{1}{4} q_0 L \end{bmatrix}$$

respectiv în forma lui numerică

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = q_0 \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}.$$

Modelele elementale expandate pentru cele două elemente sunt

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = q_0 \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.25 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = q_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1.25 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

Asamblând modelul elemental pentru cele două elemente finite în care a fost discretizat conductorul, se obține ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5+1.5 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = q_0 \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Considerând $q_0 = 1$ şi impunând condițiile inițiale, rezultă relația

$$\begin{bmatrix} 10^{15} & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 10^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \cdot 10^{15} \\ 2.5 \\ 60 \cdot 10^{15} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

Soluțiile care se obțin sunt

$$T_0 = 50\,°C, \quad T_1 = 55.838\,°C, \quad T_2 = 60\,°C.$$

Cazul II. Se discretizează domeniul de analiză în 3 elemente finite liniare.

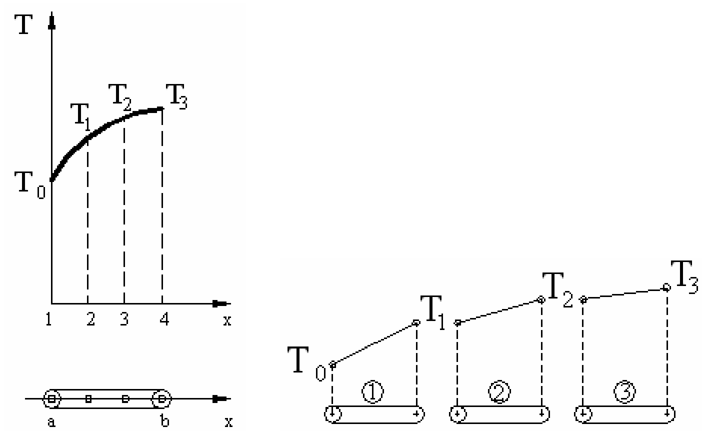


Figura 4. Discretizarea conductorului în 3 elemente finite liniare.

Sistemul matriceal elemental în acest caz este

$$\begin{bmatrix} \int_0^{\frac{L}{3}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx & \int_0^{\frac{L}{3}} \lambda \frac{dN_0}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \\ \int_0^{\frac{L}{3}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_0}{dx} dx & \int_0^{\frac{L}{3}} \lambda \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{L}{3}} N_0 q_0 dx \\ \int_0^{\frac{L}{3}} N_1 q_0 dx \end{bmatrix}$$

unde funcțiile de formă se calculează astfel

$$N_0(x)=\frac{x_1-x}{\frac{L}{3}}=\frac{\frac{L}{3}-x}{\frac{L}{3}}=1-\frac{3x}{L}\ ,\ \ N_1(x)=\frac{x-x_0}{\frac{L}{3}}=\frac{x}{\frac{L}{3}}=\frac{3x}{L}$$

$$\frac{dN_0}{dx}=-\frac{3}{L}\ ,\ \ \frac{dN_1}{dx}=\frac{3}{L}$$

Integralele care apar în matricea caracteristică elementală şi în matricea termenilor liberi sunt

$$\int_0^{\frac{L}{3}}\lambda\frac{dN_0}{dx}\cdot\frac{dN_0}{dx}dx=\lambda\int_0^{\frac{L}{3}}\left(-\frac{3}{L}\right)\left(-\frac{3}{L}\right)dx=\frac{3\lambda}{L}\,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}}\lambda\frac{dN_0}{dx}\cdot\frac{dN_1}{dx}dx=\lambda\int_0^{\frac{L}{3}}\left(-\frac{3}{L}\right)\frac{3}{L}dx=-\frac{3\lambda}{L}\,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}}\lambda\frac{dN_1}{dx}\cdot\frac{dN_0}{dx}dx=\lambda\int_0^{\frac{L}{3}}\frac{3}{L}\left(-\frac{3}{L}\right)dx=-\frac{3\lambda}{L}\,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}}\lambda\frac{dN_1}{dx}\cdot\frac{dN_1}{dx}dx=\lambda\int_0^{\frac{L}{3}}\frac{3}{L}\frac{3}{L}dx=\frac{3\lambda}{L}\,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}}N_i q_0 dx=q_0\int_0^{\frac{L}{3}}(1-\frac{3x}{L})dx=\frac{1}{6}q_0L\,,$$

$$\int_0^{\frac{L}{3}}N_j q_0 dx=q_0\int_0^{\frac{L}{3}}\frac{3x}{L}dx=\frac{1}{6}q_0L\,.$$

Introducând aceste rezultate în sistemul matriceal elemental, se obține

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3\lambda}{L} & -\dfrac{3\lambda}{L} \\ -\dfrac{3\lambda}{L} & \dfrac{3\lambda}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6} q_0 L \\ \dfrac{1}{6} q_0 L \end{bmatrix}$$

Expandând fiecare element finit şi asamblând, se obține în final sistemul matriceal global

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3\lambda}{L} & -\dfrac{3\lambda}{L} & 0 & 0 \\ -\dfrac{3\lambda}{L} & \dfrac{3\lambda}{L}+\dfrac{3\lambda}{L} & -\dfrac{3\lambda}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3\lambda}{L} & \dfrac{3\lambda}{L}+\dfrac{3\lambda}{L} & -\dfrac{3\lambda}{L} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3\lambda}{L} & \dfrac{3\lambda}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6} q_0 L \\ \dfrac{1}{6} q_0 L + \dfrac{1}{6} q_0 L \\ \dfrac{1}{6} q_0 L + \dfrac{1}{6} q_0 L \\ \dfrac{1}{6} q_0 L \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Înlocuind valorile numerice cunoscute şi considerând fluxul termic volumetric $q_0 = 1$, rezultă sistemul matriceal

$$\begin{bmatrix} 2.238 & -2.238 & 0 & 0 \\ -2.238 & 4.476 & -2.238 & 0 \\ 0 & -2.238 & 4.476 & -2.238 \\ 0 & 0 & -2.238 & 2.238 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.833 \\ 1.667 \\ 1.667 \\ 0.833 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Utilizarea condițiilor la limită $T_0 = 50\ {}^0\mathrm{C}$, $T_3 = 60\ {}^0\mathrm{C}$ implică rezolvarea sistemului matriceal

$$\begin{bmatrix} 10^{15} & -2.238 & 0 & 0 \\ -2.238 & 4.476 & -2.238 & 0 \\ 0 & -2.238 & 4.476 & -2.238 \\ 0 & 0 & -2.238 & 10^{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \cdot 10^{15} \\ 1.667 \\ 1.667 \\ 60 \cdot 10^{15} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Rezolvând acest sistem de ecuații se obțin următoarele valori pentru temperaturile nodale

$$T_0 = 50\,°\mathrm{C}, \quad T_1 = 54.078\,°\mathrm{C}, \quad T_2 = 57.411\,°\mathrm{C}, \quad T_3 = 60\,°\mathrm{C}.$$

Rezolvare numerică în MathCAD

Varianta 1. Cu ajutorul programului următor vom analiza cazul în care conductorul se discretizează în 2 elemente finite liniare.

$\mathtt{ORIGIN} \equiv 1$

Lungimea conductorului

$\mathtt{lu} := 5$

Fluxul termic volumetric

$\mathtt{q0} := 1$

Coeficientul de conductivitate termică

$\lambda := 3.73$

Matricea caracteristică şi matricea termenilor liberi

$$\mathtt{MK} := \begin{pmatrix} \frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} & -\frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} & 0 \\ -\frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} & \frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} + \frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} & -\frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} \\ 0 & -\frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} & \frac{2\cdot\lambda}{\mathtt{lu}} \end{pmatrix} \quad \mathtt{TL} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot\mathtt{q0}\cdot\mathtt{lu} \\ \frac{1}{4}\cdot\mathtt{q0}\cdot\mathtt{lu} + \frac{1}{4}\cdot\mathtt{q0}\cdot\mathtt{lu} \\ \frac{1}{4}\cdot\mathtt{q0}\cdot\mathtt{lu} \end{pmatrix}$$

$$\mathtt{MK} = \begin{pmatrix} 1.492 & -1.492 & 0 \\ -1.492 & 2.984 & -1.492 \\ 0 & -1.492 & 1.492 \end{pmatrix} \quad \mathtt{TL} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

Impunerea condiţiilor iniţiale

$\mathtt{Mc} := \mathtt{MK} \quad \mathtt{Tc} := \mathtt{TL}$

$\mathtt{Mc}_{1,1} := 10^{15} \quad \mathtt{Mc}_{3,3} := 10^{15}$

$\mathtt{Tc}_1 := 50\cdot 10^{15} \quad \mathtt{Tc}_3 := 60\cdot 10^{15}$

$$\mathtt{Mc} = \begin{pmatrix} 1\times 10^{15} & -1.492 & 0 \\ -1.492 & 2.984 & -1.492 \\ 0 & -1.492 & 1\times 10^{15} \end{pmatrix} \quad \mathtt{Tc} = \begin{pmatrix} 5\times 10^{16} \\ 2.5 \\ 6\times 10^{16} \end{pmatrix}$$

Rezolvarea matriceală a sistemului și soluțiile

$$te := Mc^{-1} \cdot Tc$$

$$te = \begin{pmatrix} 50 \\ 55.838 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Varianta 2. Distribuția temperaturii în cazul în care conductorul se discretizează în 3 elemente finite liniare este analizată cu următorul program.

$$ORIGIN \equiv 1$$

Lungimea conductorului

$$lu := 5$$

Fluxul termic volumetric

$$q0 := 1$$

Coeficientul de conductivitate termică

$$\lambda := 3.73$$

Matricea caracteristică și matricea termenilor liberi

$$MK := \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot \lambda}{lu} & -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} & 0 & 0 \\ -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} & \frac{3 \cdot \lambda}{lu} + \frac{3 \cdot \lambda}{lu} & -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} & \frac{3 \cdot \lambda}{lu} + \frac{3 \cdot \lambda}{lu} & -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} \\ 0 & 0 & -\frac{3 \cdot \lambda}{lu} & \frac{3 \cdot \lambda}{lu} \end{pmatrix}$$

$$MK = \begin{pmatrix} 2.238 & -2.238 & 0 & 0 \\ -2.238 & 4.476 & -2.238 & 0 \\ 0 & -2.238 & 4.476 & -2.238 \\ 0 & 0 & -2.238 & 2.238 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TL} := \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu \\ \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu + \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu \\ \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu + \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu \\ \frac{1}{6}\cdot q0\cdot lu \end{pmatrix} \qquad \mathrm{TL} = \begin{pmatrix} 0.833 \\ 1.667 \\ 1.667 \\ 0.833 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor la limită

$$Mc := MK \qquad Tc := TL$$

$$Mc_{1,1} := 10^{15} \qquad Mc_{4,4} := 10^{15}$$

$$Tc_1 := 50\cdot 10^{15} \qquad Tc_4 := 60\cdot 10^{15}$$

$$Mc = \begin{pmatrix} 1\times 10^{15} & -2.238 & 0 & 0 \\ -2.238 & 4.476 & -2.238 & 0 \\ 0 & -2.238 & 4.476 & -2.238 \\ 0 & 0 & -2.238 & 1\times 10^{15} \end{pmatrix} \qquad Tc = \begin{pmatrix} 5\times 10^{16} \\ 1.667 \\ 1.667 \\ 6\times 10^{16} \end{pmatrix}$$

Distribuția temperaturii

$$te := Mc^{-1}\cdot Tc$$

$$te = \begin{pmatrix} 50 \\ 54.078 \\ 57.411 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Varianta 3. Programul următor analizează distribuția temperaturii în conductor, pentru o discretizare în n = 4 elemente finite liniare şi, totodată, permite generalizarea la n elemente finite.

$$ORIGIN \equiv 1$$

Lungimea conductorului

$lu := 5$

Fluxul termic volumetric

$q0 := 1$

Coeficientul de conductivitate termică

$\lambda := 3.73$

Temperatura în primul nod

$T\_prim := 50$

Temperatura în ultimul nod

$T\_ultim := 60$

Numărul de elemente finite liniare

$n := 4$

Lungimea unui element finit

$$lelem := \frac{lu}{n}$$

Funcțiile de formă

$$N1(x) := \frac{x}{lelem} \qquad N0(x) := 1 - \frac{x}{lelem}$$

$$term1 := \int_0^{lelem} \lambda \cdot \left(\frac{d}{dx}N0(x)\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}N0(x)\right) dx$$

$$term2 := \int_0^{lelem} \lambda \cdot \left(\frac{d}{dx}N0(x)\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}N1(x)\right) dx$$

$$term3 := \int_0^{lelem} \lambda \cdot \left(\frac{d}{dx}N1(x)\right) \cdot \left(\frac{d}{dx}N1(x)\right) dx$$

Asamblarea matricei caracteristice globale

```
MK := | for i ∈ 1 .. n + 1
      |   for j ∈ 1 .. n + 1
      |     E[i, j] ← 0
      | E[1, 1] ← term1
      | E[n+1, n+1] ← term3
      | for t ∈ 1 .. n − 1
      |   E[t+1, t+1] ← term3 + term1
      | for p ∈ 1 .. n
      |   | E[p+1, p] ← term2
      |   | E[p, p+1] ← term2
      | E
```

$$MK = \begin{pmatrix} 2.984 & -2.984 & 0 & 0 & 0 \\ -2.984 & 5.968 & -2.984 & 0 & 0 \\ 0 & -2.984 & 5.968 & -2.984 & 0 \\ 0 & 0 & -2.984 & 5.968 & -2.984 \\ 0 & 0 & 0 & -2.984 & 2.984 \end{pmatrix}$$

Asamblarea matricei termenilor liberi

$$termli1 := \int_0^{lelem} q0 \cdot N0(x)\, dx$$

$$termli2 := \int_0^{lelem} q0 \cdot N1(x)\, dx$$

```
TL := | for i ∈ 1 .. n + 1
      |   L[i] ← termli1
      | for j ∈ 2 .. n
      |   L[j] ← termli2 + termli1
      | L
```

$$TL = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 1.25 \\ 1.25 \\ 1.25 \\ 0.625 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor la limită

$\mathtt{Mc} := \mathtt{MK} \quad \mathtt{Mc}_{1,1} := 10^{15} \quad \mathtt{Mc}_{n+1,n+1} := 10^{15}$

$\mathtt{Tc} := \mathtt{TL} \quad \mathtt{Tc}_1 := \mathtt{T\_prim} \cdot 10^{15} \quad \mathtt{Tc}_{n+1} := \mathtt{T\_ultim} \cdot 10^{15}$

$$\mathtt{Mc} = \begin{pmatrix} 1\times10^{15} & -2.984 & 0 & 0 & 0 \\ -2.984 & 5.968 & -2.984 & 0 & 0 \\ 0 & -2.984 & 5.968 & -2.984 & 0 \\ 0 & 0 & -2.984 & 5.968 & -2.984 \\ 0 & 0 & 0 & -2.984 & 1\times10^{15} \end{pmatrix} \quad \mathtt{Tc} = \begin{pmatrix} 5\times10^{16} \\ 1.25 \\ 1.25 \\ 1.25 \\ 6\times10^{16} \end{pmatrix}$$

Rezolvarea matriceală a sistemului

$\mathtt{te} := \mathtt{Mc}^{-1} \cdot \mathtt{Tc}$

$$\mathtt{te} = \begin{pmatrix} 50 \\ 53.128 \\ 55.838 \\ 58.128 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Rezolvare numerică în MATLAB

Se consideră cazul în care fluxul termic volumetric este variabil, conductorul fiind discretizat în 3 elemente finite liniare.

```
clc,clear,
  %Lungimea conductorului
lu=5
  %Coeficientul de conductivitate termică
lamda=3.73
  %Matricea caracteristică
term=(3*lamda)/lu;
MK=[term -term 0 0;-term 2*term -term 0;0 -term 2*term -
term;0 0 -term term]
  %Matricea caracteristică cu condiții la limită
Mc=MK;
Mc(1,1)=10^15; Mc(4,4)=10^15;
  %Matricea termenilor liberi
```

```
    for i=1:30
        q0(i)=i+0.5*(i-1);
        tel=(q0(i)*lu)/6;
        TL=[tel; 2*tel; 2*tel; tel]
            %Matricea termenilor liberi cu condiții la limită
        Tc=TL;
        Tc(1)=50*10^15; Tc(4)=60*10^15;
        te=inv(Mc)*Tc;
        disp('Fluxul termic volumetric   T0   T1   T2   T3')
        rez(i,1)=q0(i);
rez(i,2)=te(1);rez(i,3)=te(2);rez(i,4)=te(3);rez(i,5)=te(4)
    end;
```

În urma rulării programului se obțin următoarele rezultate:

Fluxul termic	T0	T1	T2	T3
rez =				
1.0000	50.0000	54.0780	57.4114	60.0000
2.5000	50.0000	55.1951	58.5284	60.0000
4.0000	50.0000	56.3122	59.6455	60.0000
5.5000	50.0000	57.4293	60.7626	60.0000
7.0000	50.0000	58.5463	61.8797	60.0000
8.5000	50.0000	59.6634	62.9967	60.0000
10.0000	50.0000	60.7805	64.1138	60.0000
11.5000	50.0000	61.8975	65.2309	60.0000
13.0000	50.0000	63.0146	66.3479	60.0000
14.5000	50.0000	64.1317	67.4650	60.0000
16.0000	50.0000	65.2487	68.5821	60.0000
17.5000	50.0000	66.3658	69.6991	60.0000
19.0000	50.0000	67.4829	70.8162	60.0000
20.5000	50.0000	68.5999	71.9333	60.0000
22.0000	50.0000	69.7170	73.0503	60.0000
23.5000	50.0000	70.8341	74.1674	60.0000
25.0000	50.0000	71.9511	75.2845	60.0000
26.5000	50.0000	73.0682	76.4015	60.0000
28.0000	50.0000	74.1853	77.5186	60.0000
29.5000	50.0000	75.3024	78.6357	60.0000
31.0000	50.0000	76.4194	79.7528	60.0000
32.5000	50.0000	77.5365	80.8698	60.0000
34.0000	50.0000	78.6536	81.9869	60.0000
35.5000	50.0000	79.7706	83.1040	60.0000
37.0000	50.0000	80.8877	84.2210	60.0000
38.5000	50.0000	82.0048	85.3381	60.0000
40.0000	50.0000	83.1218	86.4552	60.0000
41.5000	50.0000	84.2389	87.5722	60.0000
43.0000	50.0000	85.3560	88.6893	60.0000
44.5000	50.0000	86.4730	89.8064	60.0000

§2.8 DISTRIBUȚIA TEMPERATURII ÎNTR-UN CÂMP TERMIC CONDUCTIV

Considerăm cazul unui câmp termic conductiv, caracteristic mediilor solide sau mediilor fluide, a căror particule au o viteză de deplasare atât de mică, încât fenomenele convective pot fi neglijate. Atunci când variația temperaturii într-o anumită direcție este mult mai mare decât în celelalte două direcții ale unui sistem de referință (reper) cartezian, acest câmp termic poate fi considerat *unidirecțional.*

Ecuația fundamentală a transferului de căldură în acest caz (în primă aproximație) este

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_0=\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}\ , \tag{1}$$

unde T este funcția de temperatură, λ - coeficientul de conductivitate termică, q_0- fluxul termic volumetric al surselor de căldură, ρ - densitatea materialului, c_p - căldura specifică a materialului.

Dacă ne referim numai la regimul termic staționar (T=T(x)) şi la cazul unui mediu cu proprietăți termice liniare (λ - const.), atunci ecuația fundamentală a câmpului termic devine

$$\lambda\frac{d^2T}{dx^2}+q_0=0 \tag{2}$$

Condițiile la limită pot fi de tip Dirichlet – atunci când se specifică temperatura, de tip Neuman – atunci când se specifică fluxul termic şi de tip Cauchy – când se specifică temperatura fluxului ambiant şi coeficientul de transfer a căldurii spre, sau dinspre suprafața corpului solid (Figura 1). Matematic, aceste relații de calcul se pot scrie astfel

$$T=g(r)\ ,\ x\in S_T \tag{3}$$

$$\lambda \frac{dT}{dx} n + q = 0 \,, \; x \in S_q \tag{4}$$

$$\lambda \frac{dT}{dx} n + \alpha (T - T_\alpha) = 0 \,, \; x \in S_\alpha \tag{5}$$

unde s-a notat cu g o funcție de temperatură cunoscută, n - versorul normalei la suprafața de frontieră considerată, q - fluxul termic prin suprafața de frontieră considerată, α - coeficientul de transfer al căldurii de la, sau spre mediul ambiant. T_α - temperatura mediului ambiant, S_T, S_q, S_α - pânze ale suprafeței de frontieră pe care se specifică temperatura, fluxul termic şi respectiv temperatura mediului ambiant împreună cu valoarea coeficientului de convecție α. Modelul analitic de bază este constituit în acest caz din ecuația fundamentală (2) care încorporează legea constitutivă pentru coeficientul de conductivitate termică (λ - const.) şi condițiile la limită specificate prin relațiile (3)-(5). Menționăm că, în funcție de complexitatea problemei analizate, aceste condiții la limită pot fi prezente toate sau numai în parte.

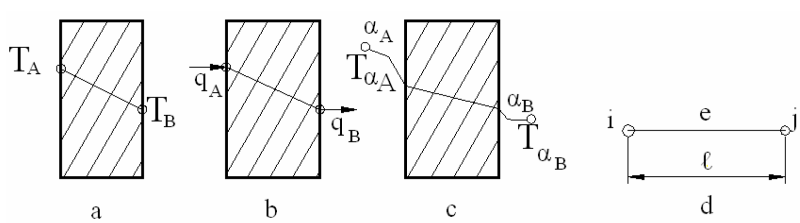


Figura 1. Câmpul termic conductiv

a) Dirichlet; b) Neuman; c) Cauchy; d) element liniar finit.

Considerând discretizarea din Figura 1d, folosind elementele finite unidimensionale de tip liniar, pentru un element finit oarecare e cu nodurile i şi j, funcțiile de formă sunt

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{\ell}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{\ell} \tag{6}$$

unde x_i şi x_j sunt coordonatele nodurilor i şi j, iar $\ell = x_j - x_i$ este lungimea elementului finit.

Funcția de aproximare a temperaturii pe domeniul unui element finit este

$$\hat{T}^{<e>}(x) = N_i(x)T_i + N_j(x)T_j \qquad (7)$$

unde T_i şi T_j sunt valorile câmpului termic în nodurile i şi j ale elementului finit considerat.

Pentru transformarea modelului analitic de bază într-o formă integrală vom aplica metoda lui Galerkin. Introducând funcția de aproximare a temperaturii (7) în ecuația

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + q_0 = 0\,, \qquad (8)$$

scrisă la nivelul elemental, aceasta nu mai este satisfăcută, obținându-se un reziduu $R^{<e>}$

$$\lambda^{<e>} \frac{d^2\hat{T}}{dx^2} + q_0^{<e>} = R^{<e>}. \qquad (9)$$

Acest reziduu se anulează numai pentru cazul limită când $T(x) = \hat{T}(x)$. Integrând acest reziduu pe subdomeniile $V^{<e>}$ ale domeniului de analiză V, se pot găsi anumite funcții de pondere H, astfel încât

$$\sum_{e=1}^{n} \int_{V^{<e>}} H_i R^{<e>} dV = 0. \qquad (10)$$

În varianta lui Galerkin, aceste funcții de pondere se consideră a fi chiar funcții de formă. Se obține astfel sistemul de ecuații elementale

$$\left(N_i, R^{<e>}\right) = \int_{V^{<e>}} N_i \left(\lambda^{<e>} \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + q_0^{<e>}\right) dV = 0$$

$$\left(N_j, R^{<e>}\right) = \int_{V^{<e>}} N_j \left(\lambda^{<e>} \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + q_0^{<e>}\right) dV = 0 \tag{11}$$

unde s-a notat cu (f , g) produsele scalare a functiilor f şi g. Considerând constantă secțiunea transversală printr-un element finit (A= const.), se obține sistemul

$$\int_o^{\ell} N_i \left(\lambda^{<e>} \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + q_0^{<e>}\right) dx = 0$$

$$\int_o^{\ell} N_j \left(\lambda^{<e>} \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} + q_0^{<e>}\right) dx = 0 \tag{12}$$

unde cu ℓ s-a notat lungimea unui element finit. Folosirea indicelui e se face pentru a sublinia faptul că proprietățile mediului $\left(\lambda^{<e>}, q_0^{<e>}\right)$ pot avea valori diferite de la un element la altul. Observând că

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda^{<e>} N_i \frac{d\hat{T}}{dx}\right) = \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{d\hat{T}}{dx} + \lambda^{<e>} N_i \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda^{<e>} N_j \frac{d\hat{T}}{dx}\right) = \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{d\hat{T}}{dx} + \lambda^{<e>} N_j \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2},$$

ecuațiile (12) se pot scrie astfel

$$\begin{aligned}&\int_o^\ell \frac{d}{dx}\left(\lambda^{<e>} N_i \frac{d\hat{T}}{dx}\right)dx - \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx}\cdot\frac{d\hat{T}}{dx}dx + \int_0^\ell N_i q_0^{<e>} dx = 0,\\ &\int_o^\ell \frac{d}{dx}\left(\lambda^{<e>} N_j \frac{d\hat{T}}{dx}\right)dx - \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx}\cdot\frac{d\hat{T}}{dx}dx + \int_0^\ell N_j q_0^{<e>} dx = 0\end{aligned} \tag{13}$$

Integrând primii termeni şi aplicând legea lui Fourier în nodurile i şi j ale elementului finit considerat, rezultă

$$\begin{aligned}&N_i\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_j} - N_i\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_i} = -N_i\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_i} = q_i\\ &N_j\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_j} - N_j\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_i} = N_j\lambda^{<e>}\frac{d\hat{T}}{dx}\bigg|_{x=x_j} = -q_j\end{aligned} \tag{14}$$

Introducând (14) în (13) obținem

$$\begin{aligned}&\int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx}\frac{d\hat{T}}{dx}dx = \int_0^\ell N_i q_0^{<e>} dx + q_i\\ &\int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx}\frac{d\hat{T}}{dx}dx = \int_0^\ell N_j q_0^{<e>} dx - q_j\end{aligned} \tag{15}$$

Introducând funcția de aproximare a temperaturii (7)

$$\hat{T}^{<e>}(x) = N_i(x)T_i + N_j(x)T_j$$

în ecuațiile (15) şi rearanjând termenii, se obține sistemul matriceal

$$\begin{bmatrix} \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx}\cdot\frac{dN_i}{dx}dx & \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx}\cdot\frac{dN_j}{dx}dx \\ \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx}\cdot\frac{dN_i}{dx}dx & \int_0^\ell \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx}\cdot\frac{dN_j}{dx}dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\ell N_i q_0^{<e>} dx + q_i \\ \int_0^\ell N_j q_0^{<e>} dx - q_j \end{bmatrix} \tag{16}$$

Să evaluăm coeficienții matriceali

$$\int_0^{\ell} \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_i}{dx} dx = \lambda^{<e>} \int_0^{\ell} \left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(-\frac{1}{\ell}\right) dx = \frac{\lambda^{<e>}}{\ell}$$

$$\int_0^{\ell} \lambda^{<e>} \frac{dN_j}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx = \lambda^{<e>} \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell} \cdot \frac{1}{\ell} dx = \frac{\lambda^{<e>}}{\ell}$$

$$\int_0^{\ell} \lambda^{<e>} \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx = \lambda^{<e>} \int_0^{\ell} \left(-\frac{1}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{\ell} dx = -\frac{\lambda^{<e>}}{\ell}$$

$$\int_0^{\ell} N_i q_0^{<e>} dx = q_0^{<e>} \int_{x_i}^{x_j} \frac{x_i - x}{\ell} dx = \frac{1}{2} q_0^{<e>} \ell$$

$$\int_0^{\ell} N_j q_0^{<e>} dx = q_0^{<e>} \int_{x_i}^{x_j} \frac{x - x_i}{\ell} dx = \frac{1}{2} q_0^{<e>} \ell \, .$$

Introducând aceste rezultate în sistemul matriceal (16), se obține

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^{<e>}}{\ell} & -\dfrac{\lambda^{<e>}}{\ell} \\ -\dfrac{\lambda^{<e>}}{\ell} & \dfrac{\lambda^{<e>}}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} q_0^{<e>} \ell + q_i \\ \dfrac{1}{2} q_0^{<e>} \ell - q_j \end{bmatrix} \tag{17}$$

de unde se obține modelul numeric elemental

$$k^{<e>} \cdot T^{<e>} = F^{<e>} , \tag{18}$$

unde matricea de rigiditate $k^{<e>}$ conține coeficientul de conductivitate termică $\lambda^{<e>}$, iar termenul liber $F^{<e>}$ conține fluxul termic volumetric $q_0^{<e>}$ şi fluxurile termice nodale q_i și q_j. Vectorul temperaturilor nodale constituie în acest caz vectorul mărimilor necunoscute ale problemei.

Aplicație. Să se determine distribuția de temperatură într-un element de combustibil nuclear de tip placă, cu dimensiunile $1220 \times 90 \times 6$ mm. Elementul este realizat din uraniu metalic cu îmbogățirea de 1.5%, conductivitate termică $\lambda = 0.32 \dfrac{W}{cm \cdot °C}$ şi densitatea surselor de căldură care se consideră uniform distribuite $q_0 = 226 \dfrac{W}{cm^3}$. Temperatura pe cele două fețe laterale ale plăcii este de 334^0C.

Se discretizează domeniul de analiză în 6 elemente finite liniare, numerotate ca în figura alăturată (Figura 2).

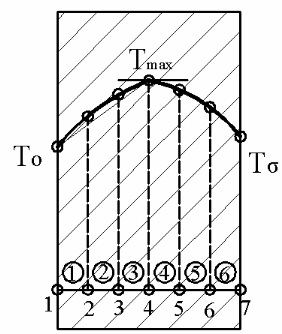


Figura 2. Discretizarea domeniului de analiză în elemente finite liniare.

Matricea de conexiuni se prezintă astfel

Tabelul 1. Matricea de conexiuni după elemente.

Elemente	Noduri	
	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7

Deoarece se folosesc elemente finite egale iar domeniul de analiză este omogen, rezultă că fiecare element finit va avea acelaşi model elemental

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\ell} & -\frac{\lambda}{\ell} \\ -\frac{\lambda}{\ell} & \frac{\lambda}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_0 \ell + q_i \\ \frac{1}{2} q_0 \ell - q_j \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

respectiv, în forma lui numerică

$$\begin{bmatrix} 3.2 & -3.2 \\ -3.2 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.3 & +q_i \\ 11.3 & -q_j \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Expandând fiecare element finit şi asamblând, se obține în final sistemul matriceal global al întregului câmp termic analizat

$$\begin{bmatrix} 3.2 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & -3.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.3 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 11.3 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Utilizarea condițiilor la limită $T_0 = 334^0C$, $T_6 = 334^0C$ transformă sistemul de ecuații (21) în

$$\begin{bmatrix} 10^{15} & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & 10^{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 334 \cdot 10^{15} \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 334 \cdot 10^{15} \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (22) se obțin următoarele valori pentru temperaturile nodale

$$T_0 = 334\ ^oC,\ T_1 = 351.656\ ^oC,\ T_2 = 362.25\ ^oC,\ T_3 = 365.78\ ^oC,$$

$$T_4 = 362.25\ ^oC,\ T_5 = 351.656\ ^oC,\ T_6 = 334\ ^oC.$$

Temperatura într-un punct oarecare din elementul combustibil nuclear se află prin interpolare, folosind funcția de aproximare a temperaturii

$$\hat{T}(x) = N_i(x)T_i + N_j(x)T_j.$$

Să considerăm, de exemplu, un punct de abscisă $x = 0.15$ aparținând elementului finit 2. Temperatura în acest punct va fi

$$\hat{T}(0.15) = \frac{0.20 - 0.15}{0.1} \cdot 351.67 + \frac{0.15 - 0.10}{0.1} \cdot 362.27 = 356.97^0C.$$

Rezolvare numerică în MathCAD

Varianta 1.

Cu ajutorul programului următor vom analiza cazul în are domeniul de analiză se discretizează în 6 elemente finite liniare.

$\text{ORIGIN} \equiv 1$

Grosimea plăcii în cm

$gr := 0.6$

Coeficientul de conductivitate termică

$\lambda := 0.32$

Fluxul termic volumetric

$q0 := 226$

Lungimea unui element finit

$lu := \frac{gr}{6}$

Matricea termenilor liberi şi matricea caracteristică

$$\mathrm{TL} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot q0\cdot lu \\ q0\cdot lu \\ q0\cdot lu \\ q0\cdot lu \\ q0\cdot lu \\ q0\cdot lu \\ \frac{1}{2}\cdot q0\cdot lu \end{pmatrix} \qquad \mathrm{TL} = \begin{pmatrix} 11.3 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 22.6 \\ 11.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MK} := \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu}+\frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu}+\frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu}+\frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu}+\frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu}+\frac{\lambda}{lu} & -\frac{\lambda}{lu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{lu} & \frac{\lambda}{lu} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{MK} = \begin{pmatrix} 3.2 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & 6.4 & -3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.2 & 3.2 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor inițiale

$\mathrm{Mc} := \mathrm{MK} \quad \mathrm{Tc} := \mathrm{TL}$

$\mathrm{Mc}_{1,1} := 10^{15} \quad \mathrm{Mc}_{7,7} := 10^{15} \quad \mathrm{Tc}_{1} := 334\cdot 10^{15} \quad \mathrm{Tc}_{7} := 334\cdot 10^{15}$

Rezolvarea matriceală a sistemului

$$temp := Mc^{-1} \cdot Tc \qquad temp = \begin{pmatrix} 334 \\ 351.656 \\ 362.25 \\ 365.781 \\ 362.25 \\ 351.656 \\ 334 \end{pmatrix}$$

Varianta 2.

Programul următor analizează distribuția temperaturii în câmpul termic, permițând generalizarea la n elemente finite liniare.

$ORIGIN \equiv 1$

Grosimea plăcii în cm

$gr := 0.6$

Coeficientul de conductivitate termică

$\lambda := 0.32$

Fluxul termic volumetric

$q0 := 226$

Condițiile inițiale

$T\_initial := 334 \quad T\_final := 334$

Numărul elementelor finite liniare

$n := 5$

Lungimea unui element finit

$$lelem := \frac{gr}{n}$$

Asamblarea matricei termenilor liberi

$$TL := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 .. n+1 \\ \quad L_i \leftarrow \frac{1}{2} \cdot q0 \cdot lelem \\ \text{for } j \in 2 .. n \\ \quad L_j \leftarrow \frac{1}{2} \cdot q0 \cdot lelem + \frac{1}{2} \cdot q0 \cdot lelem \\ L \end{array} \right. \qquad TL = \begin{pmatrix} 13.56 \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 13.56 \end{pmatrix}$$

Asamblarea matricei caracteristice globale

$$MK := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 .. n+1 \\ \quad \text{for } j \in 1 .. n+1 \\ \quad\quad E_{i,j} \leftarrow 0 \\ E_{1,1} \leftarrow \frac{\lambda}{lelem} \\ E_{n+1,n+1} \leftarrow \frac{\lambda}{lelem} \\ \text{for } t \in 1 .. n-1 \\ \quad E_{t+1,t+1} \leftarrow \frac{\lambda}{lelem} + \frac{\lambda}{lelem} \\ \text{for } p \in 1 .. n \\ \quad \left| \begin{array}{l} E_{p+1,p} \leftarrow -\frac{\lambda}{lelem} \\ E_{p,p+1} \leftarrow -\frac{\lambda}{lelem} \end{array} \right. \\ E \end{array} \right.$$

$$MK = \begin{pmatrix} 2.667 & -2.667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.667 & 2.667 \end{pmatrix}$$

Impunerea condițiilor la limită

$$\mathrm{Mc} := \mathrm{MK} \quad \mathrm{Mc}_{1,1} := 10^{15} \quad \mathrm{Mc}_{n+1,n+1} := 10^{15}$$

$$\mathrm{Tc} := \mathrm{TL} \quad \mathrm{Tc}_1 := \mathrm{T\_initial} \cdot 10^{15} \quad \mathrm{Tc}_{n+1} := \mathrm{T\_final} \cdot 10^{15}$$

$$\mathrm{Mc} = \begin{pmatrix} 1\times10^{15} & -2.667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.667 & 5.333 & -2.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.667 & 1\times10^{15} \end{pmatrix} \quad \mathrm{Tc} = \begin{pmatrix} 3.34\times10^{17} \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 27.12 \\ 3.34\times10^{17} \end{pmatrix}$$

Rezolvarea matriceală a sistemului

$$\mathrm{temp} := \mathrm{Mc}^{-1} \cdot \mathrm{Tc} \qquad \mathrm{temp} = \begin{pmatrix} 334 \\ 354.34 \\ 364.51 \\ 364.51 \\ 354.34 \\ 334 \end{pmatrix}$$

Rezolvare numerică în MATLAB

Programul următor calculează distribuția temperaturii în câmpul termic, fiind generalizat la n elemente finite liniare.

```
    clc,clear
    format short g
    disp(' ')
    Gr=input('  Introduceti grosimea placii [cm]: Gr= ');
    disp(' ')
    lamda=input('  Introduceti coeficientul de conductivitate
termica: Lamda= ');
    disp(' ')
    q0=input('  Introduceti fluxul termic volumetric: q0= ');
    disp(' ')
    T_fata=input('  Introduceti temperatura pe prima laterala:
T_fata= ');
```

```
     disp(' ')
     T_spate=input('  Introduceti temperatura pe a doua 
laterala: T_spate= ');
     disp(' ')
     n=input('  Introduceti numarul de elemente finite liniare: 
n= ');
      %Lungime element finit
     lu_elem=Gr/n;
      %Asamblarea matricei termenilor liberi
     TL(1)=(q0*lu_elem)/2;
     TL(n+1)=(q0*lu_elem)/2;
     for j=2:n
         TL(j)=q0*lu_elem;
     end;
      %Asamblarea matricei caracteristice
     MK=zeros(n+1,n+1);
     MK(1,1)=lamda/lu_elem;
     MK(n+1,n+1)=lamda/lu_elem;
     for t=1:n-1
         MK(t+1,t+1)=2*lamda/lu_elem;
     end;
     for p=1:n
         MK(p+1,p)=-lamda/lu_elem;
         MK(p,p+1)=-lamda/lu_elem;
     end;

     MK
     TL'
      %Conditiile initiale
     TL(1)=T_fata*(10^15); TL(n+1)=T_spate*(10^15);
     MK(1,1)=10^15;  MK(n+1,n+1)=10^15;

     MK
     TL
      %Calcularea temperaturilor
     temp=inv(MK)*TL'
```

Rezultatele care se obțin în urma rulării, pentru datele problemei analizate, sunt

```
temp =
     334
  351.66
  362.25
  365.78
  362.25
  351.66
     334
>>
```

§2.9 ÎNCOVOIEREA BARELOR ELASTICE

BARA SIMPLU REZEMATĂ

Fie OA o bară elastică de lungime ℓ, simplu rezemată la capetele O, A şi asupra căreia acţionează forţa concentrată P (Figura 1).

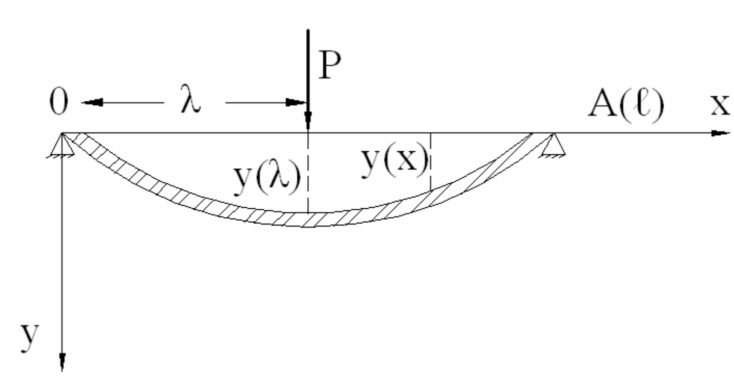


Figura 1. Bara simplu rezemată, asupra căreia acţionează forţa concentrată P.

Notând cu y săgeata în punctul $x \in [0, \ell]$, atunci condiţiile la capetele barei sunt

$$y(0)=0, \quad y''(0)=0, \quad y(\ell)=0, \quad y''(\ell)=0. \qquad (1)$$

Energia potenţială corespunzătoare barei acţionată de forţa concetrată P în punctul $x=\lambda$ are expresia

$$\pi(y)=\frac{EI}{2}\int_0^\ell (y'')^2 dx - Py(\lambda), \qquad (2)$$

unde EI reprezintă rigiditatea barei, E modulul lui Young, iar I momentul de inerţie axial al secţiunii transversale a barei.

Formularea variaţională a problemei conduce la determinarea funcţiei care realizează minimul funcţionalei (2) şi satisface condiţiile la limită (1).

Datorită condițiilor la limită (1), pentru aplicarea metodei lui Ritz vom considera familia de funcții

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \tag{3}$$

unde $\varphi_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{\ell}$, $k=1,2,....,n$, reprezintă un sistem complet de funcții care verifică condițiile la limită (1).

În consecință, familia de funcții (3) pentru orice valori date lui c_k verifică condițiile (1).

Scriind că funcția y_n realizează minimul energiei potențiale (2), vom obține pentru constantele c_k, $k=1,2,...,n$, sistemul de ecuații

$$\pi(c_1,c_{2,}.....,c_n)=\frac{EI}{2}\int_0^{\ell}(y_n'')^2 dx - Py_n(\lambda),$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial c_k}=0,\ \ k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

adică

$$EI\int_0^{\ell} y_n'' \frac{\partial y_n''}{\partial c_k} dx - P\frac{\partial y_n(\lambda)}{\partial c_k}=0. \tag{5}$$

Ținând seama de (3) obținem

$$\begin{aligned} &y_n''=-\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \quad \frac{\partial y_n(\lambda)}{\partial c_k}=\sin\frac{k\pi\lambda}{\ell}, \\ &\frac{\partial y_n''}{\partial c_k}=-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{k\pi x}{\ell}. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituind (6) în (5) obținem

$$EI\int_0^{\ell}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx - P\sin\frac{k\pi\lambda}{\ell}=0. \tag{7}$$

În baza ortogonalități șirului de funcții $\sin\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, ..., \sin\frac{n\pi x}{\ell}$, rezultă

$$\int_0^\ell \sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{k'\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ \ell/2, & k = k' \end{cases}$$

şi astfel ecuația (7) devine

$$c_k \frac{EI}{2}\frac{k^4\pi^4}{\ell^3} - P\sin\frac{k\pi\lambda}{\ell} = 0, \quad k = 1,2,....,n. \tag{8}$$

De aici obținem

$$c_k = P\frac{2\ell^3}{EI\pi^4 k^4}\sin\frac{k\pi\lambda}{\ell}, \quad k = 1,2,....,n. \tag{9}$$

Ținând seama de (3) se obține aproximația de ordinul n a săgeții, și anume

$$y_n(x) = P\frac{2\ell^3}{EI\pi^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{k\pi\lambda}{\ell}, \quad \lambda \in [0,\ell]. \tag{10}$$

BARA ÎNCASTRATĂ LA AMBELE CAPETE

Considerăm acum o bară încastrată la ambele capete, asupra căreia acționează sarcini uniform repartizate având densitatea *p* pe unitatea de lungime (Figura 2).

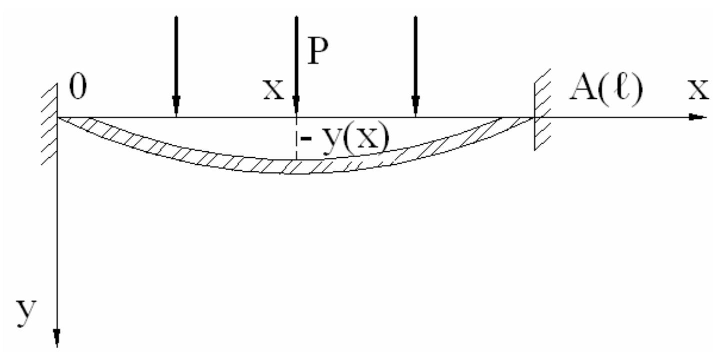


Figura 2. Bara încastrată la ambele capete, asupra căreia acționează sarcini uniform repartizate.

Deoarece bara este încastrată la ambele capete, condițiile la limită sunt

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y(\ell)=0, \quad y'(\ell)=0. \qquad (11)$$

Formularea variațională a acestei probleme constă în determinarea funcției $y \in C^4([0,\ell])$ care satisface condițiile (11) şi minimizează energia potențială corespunzătoare încărcării barei, dată sub forma funcționalei

$$\pi(y)=\frac{EI}{2}\int_0^\ell (y'')^2 dx - \int_0^\ell py(x)dx , \qquad (12)$$

unde EI reprezintă rigiditatea barei, E modulul lui Young, iar I momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

Datorită condițiilor la limită (11) considerăm familia de funcții

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k+1}(\ell - x)^2 = x^2(\ell - x)^2 \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} =$$

$$= x^2(\ell - x)^2\left(c_1 + c_2 x + ... + c_n x^{n-1}\right). \qquad (13)$$

Sistemul complet de funcții care satisface condițiile (11) este

$$\varphi_k(x)=x^{k+1}(\ell - x)^2, \quad k=1,2,...,n ,$$

deoarece

$$\varphi_k(0)=\varphi'_k(0)=0, \quad \varphi_k(\ell)=\varphi'_k(\ell)=0, \quad k=1,2,...,n .$$

În consecință, funcția y_n satisface condițiile la limită (11), rezultând

$$\begin{aligned} y''_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}\left[k(k+1)(\ell - x)^2 - 4(k+1)x(\ell - x) + 2x^2\right] \\ \frac{\partial y''_n}{\partial c_k} &= x^{k-1}\left[k(k+1)(\ell - x)^2 - 4(k+1)x(\ell - x) + 2x^2\right] \end{aligned} \quad .(14)$$

Faptul că y_n realizează minimul energiei potențiale (12) conduce la sistemul

$$\pi(c_1, c_2, ..., c_n)=\frac{EI}{2}\int_0^\ell (y''_n)^2 dx - p\int_0^\ell y_n(x)dx ,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial c_k} = 0, \quad k = \overline{1,n} \ , \tag{15}$$

adică

$$EI\int_0^\ell y_n'' \frac{\partial y_n''}{\partial c_k} dx - p\int_0^\ell \frac{\partial y_n(x)}{\partial c_k} dx = 0. \tag{16}$$

Pentru $n = 1$ avem

$$y_1(x) = c_1 x^2 (\ell - x)^2, \quad y_1'' = c_1\left[2(\ell - x)^2 - 8x(\ell - x) + 2x^2\right], \quad x \in [0, \ell],$$

şi astfel din (16) rezultă

$$c_1 = -\frac{p}{72EI},$$

deci aproximaţia de ordinul întâi are expresia

$$y_1(x) = -\frac{p}{72EI} x^2 (\ell - x)^2, \quad x \in [0, \ell].$$

În ce priveşte aproximaţia de ordinul doi, aceasta este de forma

$$y_2(x) = x^2 (\ell - x)^2 (c_1 + c_2 x), \quad x \in [0, \ell].$$

STUDIUL TORSIUNII BARELOR ELASTICE

Datorită similitudinii, prezentăm în continuare problema torsiunii barelor elastice, problemă conducând la determinarea funcţiei $\Phi(x,y) \in C^1(D)$ care realizează minimul absolut al funcţionalei

$$I(\Phi) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - 4\mu\alpha\Phi\right] dxdy \ , \tag{17}$$

unde μ reprezintă constanta lui Lamé, α unghiul de răsucire pe unitatea de lungime a barei, numit unghiul specific de torsiune, iar Ω reprezintă secţiunea transversală a barei cilindrice.

Funcţia Φ satisface condiţia la limită

$$\Phi\big|_{\Gamma} = 0 . \qquad (18)$$

Curba Γ reprezintă frontiera domeniului Ω, adică frontiera secțiunii transversale a barei.

În particular, vom cosidera că bara are secțiune dreptunghiulară, deci $\Omega = [-a, a]\times[-b, b]$.

Pentru utilizarea metodei Ritz se pot folosi funcțiile coordonate

$$\varphi_k(x, y) = \left(x^2 - a^2\right)^k\left(y^2 - b^2\right)^k, \quad k = 1,2,\ldots, \qquad (19)$$

$$\Phi_k\big|_{\Gamma} = 0 .$$

Observăm că aceste funcții formează un sistem complet față de funcțiile $\Phi \in C^1(\Omega)$ care satisfac condiția (18), şi, în consecință, familia de funcții $(u_n)_{n\geq 1}$ care formează un şir minimizant pentru funcționala (17) se poate considera de forma

$$\Phi_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(x^2 - a^2\right)^k\left(y^2 - b^2\right)^k , \qquad (20)$$

unde $\Phi_n\big|_{\Gamma} = 0$.

Pentru $n = 1$ vom obține aproximația de ordinul întâi

$$\Phi_1(x, y) = c_1\left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right), \quad (x, y)\in[-a, a]\times[-b, b]. \ (21)$$

Sustituind în (17) se obține

$$I(\Phi_1) = \pi(c_1) = 4c_1^2\left[\int_{-a}^{a} x^2dx \cdot \int_{-b}^{b}\left(y^2 - b^2\right)dy + \int_{-a}^{a}\left(x^2 - a^2\right)dx \cdot \int_{-b}^{b} y^2dy\right] -$$

$$- 4\mu\alpha c_1\int_{-a}^{a}\left(x^2 - a^2\right)dx \cdot \int_{-b}^{b}\left(y^2 - b^2\right)dy,$$

adică

$$I(\Phi_1) = \pi(c_1) = \frac{128}{45}a^3b^3\left(a^2 + b^2\right)c_1^2 - \frac{64}{9}\mu\alpha a^3b^3c_1 . \ (22)$$

Condiția de extrem $\pi'(c_1) = 0$ conduce la valoarea

$$c_1 = \frac{5\mu\alpha}{4(a^2+b^2)}.$$

Se obține astfel soluția aproximativă de ordinul întâi

$$\Phi_1(x,y) = \frac{5\mu\alpha}{4(a^2+b^2)}\left(x^2 - a^2(y^2-b^2)\right), \quad (x,y)\in[-a,a]\times[-b,b].$$

Valorile aproximative ale tensiunilor au expresiile

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{zx} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \quad \sigma_{zy} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \quad \sigma_{zz} = 0.$$

Mărimea momentului de răsucire este

$$M = 2\iint_{\Omega}\Phi_1 dxdy.$$

Observăm, în final, că funcția Φ se poate lua și de forma

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Rezolvare numerică în MathCAD

Programul următor calculează încovoierea barei simplu rezemate, asupra căreia actionează o forță concentrată.

ORIGIN $\equiv 1$

Lungimea barei: $lu := 1$

Rigiditatea barei: $EI := 2$

Forța concentrată: $P := 2$

Distanța față de capătul barei la care acționează forța:

$$\lambda := \frac{lu}{2}$$

Se aleg funcții de forma:

$$y(x) := \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{lu}\right)$$

Funcția următoare calculează soluția prin metoda Ritz, unde

li, ls reprezintă capetele intervalului de căutare,

n reprezintă numărul de rulări,

eps reprezintă precizia de calcul.

```
ritz(li,ls,n,eps) := | while |li - ls| > eps
                     |   | for i ∈ 1..n
                     |   |   | alf_i ← li + ((ls - li)/(n - 1))·(i - 1)
                     |   |   | x ← 0, 0.001..1
                     |   |   | int_i ← (EI/2)·[∫_0^lu [d²/dx² (alf_i·y(x))]² dx] - P·alf_i·y(λ)
                     |   | minim_int ← 10^8
                     |   | for index ∈ 1..n
                     |   |   if int_index < minim_int
                     |   |     | minim_int ← int_index
                     |   |     | poz_min ← index
                     |   | li ← alf_(poz_min-1)  if poz_min > 1
                     |   | li ← alf_1  if poz_min = 1
                     |   | ls ← alf_(poz_min+1)  if poz_min < n
                     |   | ls ← alf_n  if poz_min = n
                     | (alf  int  minim_int  poz_min)
```

Valorile constantei alfa:

$$\text{alfa} := \text{ritz}\left(0.01\,,\,0.03\,,\,10\,,\,10^{-5}\right)_{1\,,\,1}$$

Valorile funcționalei:

$$\text{func} := \text{ritz}\left(0.01\,,\,0.03\,,\,10\,,\,10^{-5}\right)_{1\,,\,2}$$

alfa =

	1
1	0.020525495774696
2	0.020526700047606
3	0.020527904320517
4	0.020529108593428
5	0.020530312866339
6	0.02053151713925
7	0.020532721412161
8	0.020533925685071
9	0.020535129957982
10	0.020536334230893

func =

	1
1	-0.020531962471348
2	-0.020531963159538
3	-0.020531963706462
4	-0.020531964112117
5	-0.020531964376504
6	-0.020531964499621
7	-0.020531964481461
8	-0.020531964322043
9	-0.020531964021346
10	-0.020531963579376

Minimul funcționalei:

$$\text{minim} := \text{ritz}\left(0.01\ ,\ 0.03\ ,\ 10\ ,\ 10^{-5}\right)_{1\ ,\ 3}$$

$$\text{minim} = -0.020531964499621$$

Valoarea constantei alfa care realizează minimul funcționalei:

$$\text{alfa\_fin} = 0.02053151713925$$

Soluția aproximativă este:

$$\text{yaprox}(x) := \text{alfa\_fin} \cdot y(x)$$

Fie $\text{sol1}(x) \rightarrow \dfrac{2 \cdot \sin(\pi \cdot x)}{\pi^4}$

aproximația de ordinul întâi a săgeții de încovoiere, și

$$\text{sol6}(x) \rightarrow \frac{2 \cdot \sin(\pi \cdot x) - \dfrac{2 \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot x)}{81} + \dfrac{2 \cdot \sin(5 \cdot \pi \cdot x)}{625}}{\pi^4}$$

aproximația de ordin șase a săgeții.

Figura 3 prezintă, în comparație, graficul soluției aproximative alături de cele două aproximări ale soluției analitice.

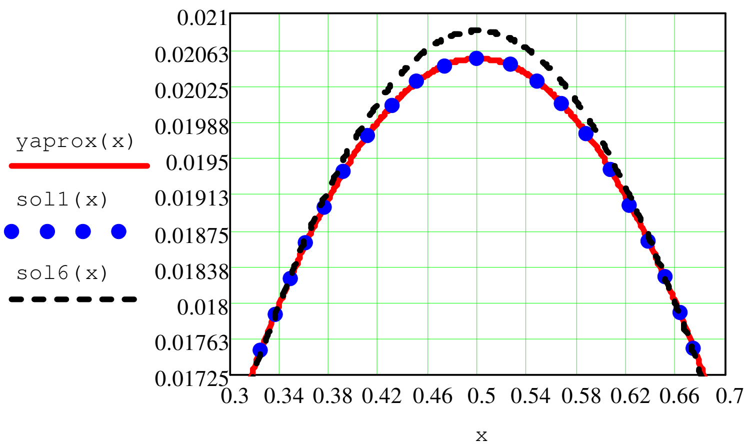


Figura 3. Săgeata de încovoiere a barei simplu rezemate, asupra căreia acționează o forță concentrată: graficul soluției aproximative în comparație cu două aproximări ale soluției analitice.

$|yaprox(x) - sol1(x)| =$

0
$1.405452367334026 \cdot 10^{-9}$
$2.810890863385457 \cdot 10^{-9}$
$4.216301617142748 \cdot 10^{-9}$
$5.621670757648567 \cdot 10^{-9}$
$7.02698441454189 \cdot 10^{-9}$
$8.432228717949585 \cdot 10^{-9}$
$9.83738979864904 \cdot 10^{-9}$
$1.124245378833922 \cdot 10^{-8}$
$1.264740681953223 \cdot 10^{-8}$
$1.405223502587861 \cdot 10^{-8}$
$1.54569245422757 \cdot 10^{-8}$
$1.686146150524717 \cdot 10^{-8}$
...

$|yaprox(x) - sol6(x)| =$

0
$1.871558400098075 \cdot 10^{-6}$
$3.743031928289664 \cdot 10^{-6}$
$5.614335700103706 \cdot 10^{-6}$
$7.485384805946439 \cdot 10^{-6}$
$9.35609429855472 \cdot 10^{-6}$
$1.122637918046841 \cdot 10^{-5}$
$1.309615439152646 \cdot 10^{-5}$
$1.496533479639333 \cdot 10^{-5}$
$1.683383517212238 \cdot 10^{-5}$
$1.870157019576092 \cdot 10^{-5}$
$2.056845443200439 \cdot 10^{-5}$
$2.243440232090467 \cdot 10^{-5}$
...

Bibliografie

[1] Bathe, K.I., Wilson, F.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, INC, New Jersey, 1976.

[2] Blumenfeld, M., Ioniță, A., Mares C., *Metoda elementelor finite. Aplicații şi programe introductive*, Editura I.P.B., Bucureşti, 1992.

[3] Bia, C., Ilie, V., Soare, M.V., *Rezistența materialelor şi teoria elasticității*, E.D.P., Bucureşti, 1983.

[4] Budynas, R.G., *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, Mc Grow-Hill, N.Y., 1977.

[5] Brebente, C., Zancu, S., Mitran, S., Pleter, O., Tătăranu, C., *Metode numerice de calcul şi aplicații*, Editura Univ. „Politehnica", Bucureşti, 1992.

[6] Brătianu, C., *Determinarea câmpului de temperaturi în pereții conductelor termice*, Energetica, Nr.6, 1982.

[7] Bratianu, C., *Metode cu elemente finite în dinamica fluidelor*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1983.

[8] Brătianu, C., *Modelarea cu elemente finite a unui câmp termic conductiv unidirecțional*, Energetica, Nr.2, 1985.

[9] Brătianu, C., Atluri, S., *On the accuracy of finite element solution of Navier-Stokes equation using a velocity-pressure formulation*, S.Y. Wang (ed.) Finite elements in water resources, The University of Mississippi, 1980.

[10] Brebbia, C.A., Walker, S., *Fundamentals of boundary element methods*, Newnes-Butterworths, Londra, 1980.

[11] Brebbia, C.A., *The boundary element method for engineers*, Pentech Press,

Londra, 1978.

[12] Ciomocoş, F.D., Ciomocoş, T., *Teoria elasticităţii în probleme şi aplicaţii*, Editura Facla, Timişoara, 1984.

[13] Connor, J.J., Brebbia, C.A., *Finite element techniques for fluid flows*, News-Butterworths, Londra, 1976.

[14] Conway, J.B., *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, New-York-Berlin-Heidelberg-Tokio, 1985.

[15] Cook, R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley&Sons, New York, 1972.

[16] Cuteanu, E., Marinov, A., *Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor*, Editura Facla, Timişoara, 1970.

[17] Desai, C.S., *Elementary finite element method*, Prentice-Hall, New Jersey, 1979.

[18] Dincă, G., *Metode variaţionale şi aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[19] Dodescu, Gh., Toma, M., *Metode de calcul numeric*, E.D.P., Bucureşti, 1976.

[20] Faur, N., *Elemente finite-Fundamente*, Editura Politehnica, Timişoara, 2002.

[21] Faur, N., Dumitru I, *Metode numerice în rezistenţa materialelor*, Univ. Politehnica Timişoara, 1997.

[22] Filipescu, D. , Grecu, E., Medinţu, R., *Matematici generale pentru subingineri*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[23] Finlayson, B.A., *The method of weighted residuals and variational principles*, Academic Press, New York, 1972.

[24] Fletcher, C.A.J., *The Galerkin method: an introduction*, Numerical simulation of fluid motion, Noye J. (ed.), North Holland Publishing Company, 1978.

[25] Forray, M.J., *Calculul variaţional în ştiinţă şi tehnică*, Editura Tehnică, 1975.

[26] Gafiteanu, M., Poteraşu, V.F., Mihalache, N., *Elemente finite şi de frontieră cu aplicaţii la calculul organelor de maşini*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.

[27] Gartling, D.K., *Recent developments in the use of finite element methods in fluid dynamics*, Computing in Applied Mechanics, Nr.18, 1976.

[28] Gârbea, D., *Analiza cu elemente finite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.

[29] Heubner, K.H., *The finite element method for engineers*, John Wiley&Sons, New York, 1975.

[30] Hughes, T.J.R., *The finite element method*, Prentice-Hall, New York, 1987.

[31] Ivan, M., *Bazele calculului liniar al structurilor*, Editura Facla, Timişoara, 1985.

[32] Kecs, W., *Complemente de matematici cu aplicaţii în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[33] Maksay, Şt., *Matematici superioare pentru subingineri*, Institutul Politehnic "Traian Vuia", Timişoara, vol.I, 1983, vol.II, 1985.

[34] Maksay, Şt., *Calcul numeric*, Editura Politehnica, Timişoara, 2002.

[35] Maksay, Şt., *Software matematic structurat*, Editura Mirton, Timişoara, 2006.

[36] Marin, C., Hadăr, A., Popa, F., Albu, L., *Modelarea cu elemente finite a structurilor mecanice*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2002.

[37] Niculescu, C. P., *Fundamentele analizei matematice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1996.

[38] Nicolescu, L. şi colectiv, *Matematici pentru ingineri*, Editura Tehnică, Bucureşti, vol.I, 1969, vol.II, 1971.

[39] Olariu, V., Brătianu, C., *Modelare numerică cu elemente finite*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

[40] Pascariu, I., *Elemente finite – concepte şi aplicaţii*, Editura Militară, Bucureşti, 1985.

[41] Reddy, J.N., *An introduction to the finite element method*, Mc Graw Inc., 1984.

[42] Resiga, R., *Mecanica fluidelor numerică*, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 2003.

[43] Salvadori, M.G., Baron M.L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.