LABORATOR 2

METODE NUMERICE PENTRU CALCULUL INVERSEI UNEI MATRICI

1. Metoda complemenților algebrici

Problemă. *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} -2 & 15 & 4 \\ 7 & 11 & -9 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. *Să se determine inversa matricei prin metoda complemenților algebrici.*

Descrierea metodei: Fie B matricea complemenților algebrici : $B = \left(B_{i,j}\right)_{i,j=1..3}$, cu elementele

$$B_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{i,j}),$$

unde matricea $A_{i,j}$ se obține prin eliminarea liniei *i* şi a coloanei *j* din matricea *A*.

Inversa matricei *A* se obține cu formula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot B^T .$$

Program varianta I:

ORIGIN ≡ 1

$$a := \begin{pmatrix} -2 & 15 & 4 \\ 7 & 11 & -9 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculul complemenților algebrici:

$A_{1,1} := \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ $\qquad A_{1,1} = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$B_{1,1} := (-1)^{1+1} \cdot \left|A_{1,1}\right|$ $\qquad B_{1,1} = 26$

$A_{2,1} := \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ $\qquad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$B_{2,1} := (-1)^{2+1} \cdot \left|A_{2,1}\right|$ $\qquad B_{2,1} = -68$

$A_{3,1} := \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$ $\qquad A_{3,1} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$

$B_{3,1} := (-1)^{3+1} \cdot \left|A_{3,1}\right|$ $\qquad B_{3,1} = -179$

$$A_{1,2} := \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad A_{1,2} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,2} := (-1)^{1+2} \cdot \left|A_{1,2}\right| \qquad B_{1,2} = -1$$

$$A_{2,2} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad A_{2,2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,2} := (-1)^{2+2} \cdot \left|A_{2,2}\right| \qquad B_{2,2} = 4$$

$$A_{3,2} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} \qquad A_{3,2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B_{3,2} := (-1)^{3+2} \cdot \left|A_{3,2}\right| \qquad B_{3,2} = 10$$

$$A_{1,3} := \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \qquad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{1,3} := (-1)^{1+3} \cdot \left|A_{1,3}\right| \qquad B_{1,3} = 19$$

$$A_{2,3} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,3} := (-1)^{2+3} \cdot \left|A_{2,3}\right| \qquad B_{2,3} = -49$$

$$A_{3,3} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad A_{3,3} = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B_{3,3} := (-1)^{3+3} \cdot \left|A_{3,3}\right| \qquad B_{3,3} = -127$$

Afişarea matricei complemenților algebrici:

$$B = \begin{pmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -68 & 4 & -49 \\ -179 & 10 & -127 \end{pmatrix}$$

Calculul inversei matricei a:

$$DET := |a|$$

$$DET = 9$$

$$inv := \frac{1}{DET} \cdot B^T$$

$$inv = \begin{pmatrix} 2.889 & -7.556 & -19.889 \\ -0.111 & 0.444 & 1.111 \\ 2.111 & -5.444 & -14.111 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 2.889 & -7.556 & -19.889 \\ -0.111 & 0.444 & 1.111 \\ 2.111 & -5.444 & -14.111 \end{pmatrix}$$

Program varianta a II a:

Această variantă de program utilizează programarea structurată.

$ORIGIN \equiv 1$

$$a := \begin{pmatrix} -2 & 15 & 4 \\ 7 & 11 & -9 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Funcție pentru calcularea matricei complemenților algebrici:

```
compl := | for i∈ 1..3
         |   for j∈ 1..3
         |     | index ← 0
         |     | for lin∈ 1..3
         |     |   for col∈ 1..3
         |     |     if lin ≠ i ∧ col ≠ j
         |     |       | index ← index + 2
         |     |       | L[index−1] ← lin
         |     |       | L[index] ← col
         |     | parta ← [ a(L1,L2)  a(L3,L4) ]
         |     |         [ a(L5,L6)  a(L7,L8) ]
         |     | B[i,j] ← (−1)^(i+j) · |parta|
         | B
```

După eliminarea liniei i şi a coloanei j din matricea a, se rețin pe rând liniile şi coloanele rămase în variabilele *lin*, respectiv *col* şi sunt plasate in vectorul *L*.

$$L = (lin \;\; col \;\; ...)$$

La finalul testării, vectorul L conține 8 elemente. De exemplu, la eliminarea liniei i = 1 şi a coloanei j = 1, vectorul L se prezintă astfel

$$L = (2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3).$$

Se formează submatricea *parta* cu elementele din matricea a specificate prin indicii liniei şi coloanei retinuți în vectorul *L*.

Se calculează complementul algebric $B_{i,j}$.

$$compl = \begin{pmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -68 & 4 & -49 \\ -179 & 10 & -127 \end{pmatrix}$$

Calculul inversei matricei a:

$DET := |a|$

$DET = 9$

$$inv := \frac{1}{DET} \cdot compl^T$$

$$inv = \begin{pmatrix} 2.889 & -7.556 & -19.889 \\ -0.111 & 0.444 & 1.111 \\ 2.111 & -5.444 & -14.111 \end{pmatrix}$$

Aplicații: Se consideră matricile

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -11 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

a. Întocmiți un program MathCAD pentru determinarea inversei fiecărei matrici utilizând *metoda complemenților algebrici.*

b. Utilizând programarea structurată, realizați o aplicație MathCAD pentru determinarea inversei fiecărei matrici cu *metoda complemenților algebrici.*

2. __Metoda__ __pivotării__ (__Metoda__ __matricei__ __extinse__)

Problemă. *Fie matricea* $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. *Să se determine inversa matricei prin metoda pivotării (metoda matricei extinse).*

Program varianta I:

$$ORIGIN \equiv 1$$

$$a := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$i := identity(3)$$

$$ai := augment(a, i)$$

$$ai = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Linia întâi se împarte cu elementul $ai_{1,1}$

$pivot := a_{1,1}$

$i := 1..6$

$$ai_{1,i} := \frac{ai_{1,i}}{pivot}$$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 1.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 pe prima coloană, sub elementul 1

$pivot := ai_{2,1}$

$j := 1..6$

$ai_{2,j} := ai_{2,j} - ai_{1,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 1.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6 & -10.2 & -0.2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$pivot := ai_{3,1}$

$j := 1..6$

$ai_{3,j} := ai_{3,j} - ai_{1,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 1.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6 & -10.2 & -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Linia doi se împarte cu elementul $ai_{2,2}$

$pivot := ai_{2,2}$

$i := 1..6$

$$ai_{2,i} := \frac{ai_{2,i}}{pivot}$$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 1.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3.923 & -0.077 & 0.385 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 pe coloana a doua, deasupra şi sub elementul 1

$pivot := ai_{1,2}$

$j := 1..6$

$ai_{1,j} := ai_{1,j} - ai_{2,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.154 & 0.154 & 0.231 & 0 \\ 0 & 1 & -3.923 & -0.077 & 0.385 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$pivot := ai_{3,2}$

$j := 1..6$

$ai_{3,j} := ai_{3,j} - ai_{2,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.154 & 0.154 & 0.231 & 0 \\ 0 & 1 & -3.923 & -0.077 & 0.385 & 0 \\ 0 & 0 & -0.385 & -0.615 & 0.077 & 1 \end{pmatrix}$$

Linia trei se împarte cu elementul $ai_{3,3}$

$pivot := ai_{3,3}$

$i := 1..6$

$$ai_{3,i} := \frac{ai_{3,i}}{pivot}$$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.154 & 0.154 & 0.231 & 0 \\ 0 & 1 & -3.923 & -0.077 & 0.385 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 pe coloana a treia, deasupra elementului 1

$pivot := ai_{1,3}$

$j := 1..6$

$ai_{1,j} := ai_{1,j} - ai_{3,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3.923 & -0.077 & 0.385 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

$pivot := ai_{2,3}$

$j := 1..6$

$ai_{2,j} := ai_{2,j} - ai_{3,j} \cdot pivot$

$$ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 & -0.4 & -10.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Rezultă inversa:

$inv := \mathrm{submatrix}(ai, 1, 3, 4, 6)$

$$inv = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6.2 & -0.4 & -10.2 \\ 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Verificare

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6.2 & -0.4 & -10.2 \\ 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Program varianta a II a:

Această variantă de program utilizează programarea structurată.

$ORIGIN \equiv 1$

$$a := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$I := \mathrm{identity}(3)$

$ai := \mathrm{augment}(a, I)$

$$ai = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n := 3$

```
inversa := | for  k ∈ 1 .. 3
           |   | pivot ← ai[k,k]
           |   | for  i ∈ 1 .. 6
           |   |    ai[k,i] ← ai[k,i] / pivot
           |   | for  j ∈ 1 .. 3
           |   |    if  j ≠ k
           |   |       | piv ← ai[j,k]
           |   |       | for  m ∈ 1 .. 6
           |   |       |    ai[j,m] ← ai[j,m] − ai[k,m]·piv
           | ai
```

Lucrând pe fiecare linie k, această funcție modifică elementele matricei extinse ai, obținând 1 pe diagonala principală, prin împărțirea fiecărei linii la pivot.

În primele trei coloane se obțin zerourile, pe pozițiile corespunzătoare.

$$\text{inversa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6.2 & -0.4 & -10.2 \\ 0 & 0 & 1 & 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Rezultă inversa:

$\text{inv} := \text{submatrix}(\text{inversa}, 1, 3, 4, 6)$

$$\text{inv} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6.2 & -0.4 & -10.2 \\ 1.6 & -0.2 & -2.6 \end{pmatrix}$$

Aplicații: Se consideră matricile

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & -10 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Întocmiți un program MathCAD pentru determinarea inversei fiecărei matrici utilizând *metoda matricei extinse.*

b. Utilizând programarea structurată, realizați o aplicație MathCAD pentru determinarea inversei fiecărei matrici cu *metoda matricei extinse.*