LABORATOR 8

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE

1. Metoda bisecției (bipartiției)

Problemă Fie ecuația

$$\cos(2x) - x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

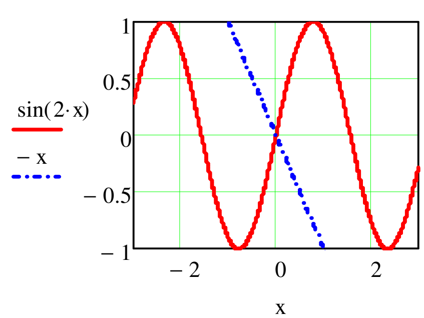
Să se separe rădăcinile ecuației utilizând Șirul lui Roole. Utilizând metoda bisecției să se determine soluțiile ecuației cu precizia eps = $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-5}$

Rezolvare: Vom aplica metoda şirului lui Roole pentru separarea rădăcinilor ecuației.

$$f(x) = \cos(2x) - x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -2\sin(2x) - 2x$$

Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x) - 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -x$

Program

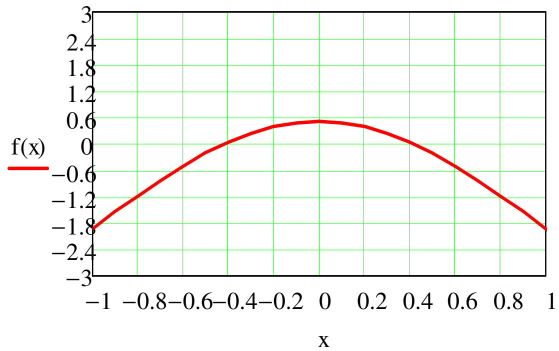


Rezultă soluția $x = 0$.

Tabelul de semn

x	-∞	0	+∞
semn(f(x))	-	1/2	-

Din tabelul de semn rezultă că ecuația are două rădăcini.



Analizând graficul observăm că prima rădăcină se află în intervalul [-0.6, 0] şi a doua rădăcină este se află în intervalul [0, 0.6].

Funcția care calculează rădăcinile

$$\text{radacina}(a, b, eps) := \left| \begin{array}{l} rad \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\ \text{while } |a-b| > eps \wedge |f(rad)| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow rad \ \text{ if } f(a)\cdot f(rad) \ge 0 \\ b \leftarrow rad \ \text{ if } f(a)\cdot f(rad) < 0 \\ rad \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{radacina}\left(-0.6, 0, 10^{-5}\right) = -0.416$$

Verificare

$$f(-0.4161483765) = -3.358 \times 10^{-7}$$

$$\text{radacina}\left(0, 0.6, 10^{-5}\right) = 0.416$$

Verificare

$$f(0.416) = 3.425 \times 10^{-4}$$

Aplicații: Utilizând metoda bisecției să se determine soluțiile ecuațiilor, pentru eps = $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-2}$:

a) $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 34.25 = 0$.

b) $x + 0.5\text{arctg}(2x) - 1 = 0$

c) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

d) $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 8 = 0$.

2. ***Metoda coardei***

Problemă Utilizând metoda coardei să se determine soluțiile ecuației

$\sin(2x) + 2x - 2 = 0$, eps = $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-5}$

Program

$$f(x) := \sin(2\cdot x) + 2\cdot x - 2$$

Reprezentam grafic functia:

$$x := -10, -10 + 0.1 .. 10$$

Analizând graficul observam că există o soluție cuprinsă în intervalul [0, 2]

Funcția care calculează rădăcinile

$$\text{radacina}(a, b, eps) := \left| \begin{array}{l} rad \leftarrow \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \\ \text{while } |a - b| > eps \wedge |f(rad)| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow rad \;\; \text{if } f(a)\cdot f(rad) \ge 0 \\ b \leftarrow rad \;\; \text{if } f(a)\cdot f(rad) < 0 \\ rad \leftarrow \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{radacina}\left(0, 2, 10^{-5}\right) = 0.553$$

Verificare $f(0.553) = -8.712 \times 10^{-5}$

Aplicații: Utilizând metoda coardei să se determine soluțiile ecuațiilor, pentru $eps = |x_{i+1} - x_i| < 10^{-2}$:

a) $\cos(2x) - \sqrt{2} \cdot x = 0$

b) $3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x - 8 = 0$.

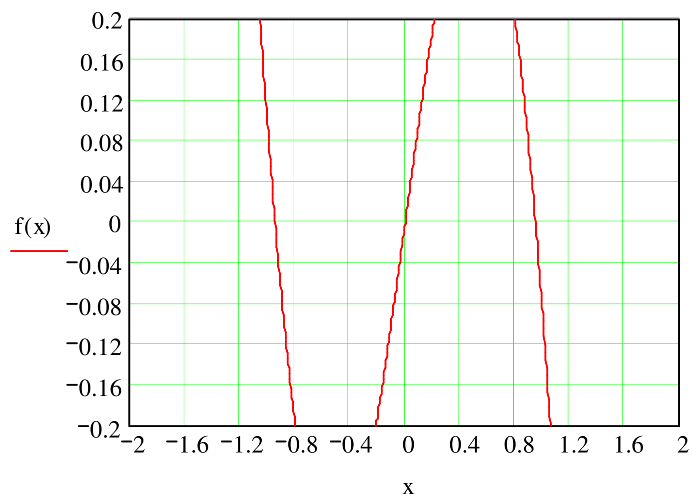
c) $x^2 + x - 6 = 0$

3. Metoda tangentei (Newton)

Problemă Utilizând metoda tangentei (Newton) să se determine soluțiile ecuației: $\sin(2x) - x = 0$, pentru $eps = |x_{i+1} - x_i| < 10^{-5}$:

Program

$f(x) := \sin(2x) - x$



Se observă că există o radacină pe intervalul [-1.2, -0.8] ,o radacină pe intervalul [-0.4, 0.4] şi o radacină pe intervalul [0.8, 1.2].

Funcția care calculează rădăcinile

$$
\text{radacina}(b, eps) := \left|
\begin{array}{l}
rad \leftarrow b - \dfrac{f(b)}{\dfrac{d}{db} f(b)} \\
\text{while } \left| rad - b \right| > eps \wedge \left| f(rad) \right| > eps \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
b \leftarrow rad \\
rad \leftarrow b - \dfrac{f(b)}{\dfrac{d}{db} f(b)}
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

$$\text{radacina}\left(-1.2, 10^{-5}\right) = -0.948$$

Verificare

$$f(-0.948) = 4.143 \times 10^{-4}$$

$$\text{radacina}\left(0.2, 10^{-5}\right) = 0$$

Verificare

$$f(0) = 0$$

$$\text{radacina}\left(0.8, 10^{-5}\right) = 0.948$$

Verificare

$$f(0.948) = -4.143 \times 10^{-4}$$

Aplicații: Utilizând metoda tangentei să se determine soluțiile ecuațiilor, pentru eps = 0.001:

a) $e^x + x^2 - 1 = 0$ c) x + 0.5arctg(2x) -1= 0

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$. d) $\ln(x) - \dfrac{\pi}{2} x = 0$