LABORATOR 3

METODE NUMERICE PENTRU CALCULUL DETERMINANȚILOR

1. Metoda condensării pivotale

Descrierea metodei: În general, metoda condensării pivotale pentru calculul unui determinant de ordinul n

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

constă în a forma determinantul

$$D_{n-1} = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{n,1} & a_{n,3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

şi a aplica formula:

$$D_n = \frac{1}{(a_{1,1})^{n-2}} \cdot D_{n-1}$$

Problema 1. *Fie determinantul Vandermonde de ordinul patru* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

Să se calculeze valoarea determinantului prin metoda condensării pivotale.

Program varianta I:

$ORIGIN \equiv 1$

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

Formarea determinantului de ordinul 3, D3:

$D3_{1,1} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{1,2} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{1,3} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right|$

$D3_{1,1} = 1$ $D3_{1,2} = 2$ $D3_{1,3} = 3$

$D3_{2,1} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{2,2} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{2,3} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}\right|$

$D3_{2,1} = 3$ $D3_{2,2} = 8$ $D3_{2,3} = 15$

$D3_{3,1} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{3,2} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 27 \end{pmatrix}\right|$ $D3_{3,3} := \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 64 \end{pmatrix}\right|$

$D3_{3,1} = 7$ $D3_{3,2} = 26$ $D3_{3,3} = 63$

$$D3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{pmatrix}$$

$det3 := |D3|$ $det3 = 12$

$n := 4$ ordinul determinantului inițial

Se aplică formula de recurență:

$$det4 := \frac{1}{\left(a_{1,1}\right)^{n-2}} \cdot det3$$

$det4 = 12$

Verificare:

$|a| = 12$

Program varianta a II a:

Această variantă de program utilizează programarea structurată.

ORIGIN $\equiv$ 1

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

```
det := | n ← 4
       | for i ∈ 1..n − 1
       |   for j ∈ 1..n − 1
       |     d[i,j] ← | ( a[1,1]     a[1,j+1]   ) |
       |              | ( a[i+1,1]   a[i+1,j+1] ) |
       | D ← 1/(a[1,1])^(n−2) · |d|
       | D
```

det = 12

Problema 2. *Fie determinantul de ordinul trei* $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Să se calculeze valoarea determinantului prin metoda condensării pivotale.

Program varianta I:

ORIGIN$\equiv$ 1

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d_{1,1} := \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\right|$$

$d_{1,1} = -8$

$d_{1,2} := \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix}\right|$

$d_{1,2} = 18$

$d_{2,1} := \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix}\right|$

$d_{2,1} = -8$

$d_{2,2} := \left|\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right|$

$d_{2,2} = 44$

$d = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ -8 & 44 \end{pmatrix}$

Formula de recurență

$n := 3$

$D := \dfrac{1}{\left(a_{1,1}\right)^{n-2}} \cdot |d|$

$D = -208$

Verificare:

$|a| = -208$

Program varianta a II a:

Acestă variantă de program utilizează programarea structurată.

$ORIGIN \equiv 1$

$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

```
det := | n ← 3
       | for i ∈ 1..n − 1
       |   for j ∈ 1..n − 1
       |     d_{i,j} ← | ( a_{1,1}     a_{1,j+1}   ) |
       |               | ( a_{i+1,1}   a_{i+1,j+1} ) |
       | D ← 1/(a_{1,1})^(n−2) · |d|
       | D
```

det = −208

Aplicații: Se consideră determinanții

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

a. Întocmiți un program MathCAD pentru calculul determinanților utilizând *metoda condensării pivotale.*

b. Utilizând programarea structurată, realizați o aplicație MathCAD pentru calculul determinanților utilizând *metoda condensării pivotale.*

2. <u>Metoda aducerii la forma superior triunghiulară</u>

Problemă. *Se consideră determinantul* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. *Să se realizeze o aplicație MathCAD pentru calculul determinantului utilizând metoda transformării în determinant superior triunghiular.*

Program varianta I:

ORIGIN≡ 1

$$d := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 pe prima coloană, în linia a doua

$pivot := d_{2,1}$

$j := 1..3$

$$d_{2,j} := d_{2,j} - d_{1,j} \cdot \frac{pivot}{d_{1,1}}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 pe prima coloană, în linia a treia

$pivot := d_{3,1}$

$j := 1..3$

$$d_{3,j} := d_{3,j} - d_{1,j} \cdot \frac{pivot}{d_{1,1}}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Obținem 0 în linia a treia, pe coloana a doua

$pivot := d_{3,2}$

$j := 1..3$

$$d_{3,j} := d_{3,j} - d_{2,j} \cdot \frac{pivot}{d_{2,2}}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -0.444 \end{pmatrix}$$

$determinant := d_{1,1} \cdot d_{2,2} \cdot d_{3,3}$

$determinant = 8$

Verificare:

$|d| = 8$

Program varianta a II a:

Acestă variantă de program utilizează programarea structurată.

$ORIGIN \equiv 1$

$$d := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$n := 3$

```
triform:= | for  i ∈ 1 .. n
          |   for  j ∈ 1 .. n
          |     if  i > j
          |        | pivot ← d[i,j]
          |        | for  col ∈ 1 .. n
          |        |   d[i,col] ← d[i,col] − d[j,col] · pivot / d[j,j]
          | d
```

Această funcție aduce determinantul la forma superior triunghiulară.

$$triform = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -0.444 \end{pmatrix}$$

```
det := | val ← 1
       | for  i ∈ 1 .. n
       |   val ← val · triform[i,i]
       | val
```

Valoarea determinantului se calculează prin înmulțirea elementelor de pe diagonala principală.

$det = 8$

Verificare:

$|d| = 8$

Aplicații: Se consideră determinanții

a) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & 5 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}$.

a. Întocmiți un program MathCAD pentru calculul determinanților utilizând *metoda aducerii la forma superior triunghiulară.*

b. Realizați o aplicație MathCAD structurată pentru calculul determinanților utilizând *metoda aducerii la forma superior triunghiulară.*