LABORATOR 9

INTEGRAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

1. Metoda aproximațiilor succesive a lui Piccard

Problemă Fie ecuația diferențială cu variabile separabile $xy' - y = y^2$ și punctul M(x_0, y_0), unde x_0=1, y_0=2.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda aproximațiilor succesive a lui Piccard pe intervalul [x_0, x_0+1].

Indicație: Ecuația diferențială se rescrie sub forma

$$y' = \frac{y + y^2}{x} \qquad x0 = 1,\ y0 = 2$$

Metoda aproximațiilor succesive constă în a construi un şir de funcții $y_0(x)$, $y_1(x)$, …, $y_n(x)$, date de relația

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx$$

Program

Variabilei x i se atribuie valorile:

$x := 1, 1.1 .. 2$

Se declară conditiile initiale:

$x0 := 1$

$y0(x) := 2$

Se definesc integralele:

$$y1(x) := y0(x) + \int_{x0}^{x} \frac{y0(x) + y0(x)^2}{x} dx$$

$$y2(x) := y0(x) + \int_{x0}^{x} \frac{y1(x) + y1(x)^2}{x} dx$$

$$y3(x) := y0(x) + \int_{x0}^{x} \frac{y2(x) + y2(x)^2}{x}\,dx$$

Afişarea rezultatelor:

x =	y0(x) =	y1(x) =	y2(x) =	y3(x) =
1	2	2	2	2
1.1	2	2.572	2.719	2.746
1.2	2	3.094	3.665	3.9
1.3	2	3.574	4.823	5.672
1.4	2	4.019	6.174	8.311
1.5	2	4.433	7.699	12.099
1.6	2	4.82	9.379	17.347
1.7	2	5.184	11.2	24.38
1.8	2	5.527	13.146	33.536
1.9	2	5.851	15.204	45.156
2	2	6.159	17.362	59.582

Aplicații:

1. Fie ecuația diferențială liniară $y' = ytgx + \cos x$
şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=0, y_0=1.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda aproximațiilor succesive a lui Piccard pe intervalul [x_0, x_0+1].

2. Fie ecuația diferențială omogenă $3xyy' = x^2 + y^2$ xy>0
şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=1, y_0=1.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda aproximațiilor succesive a lui Piccard pe intervalul [x_0, x_0+1].

3. Fie ecuația diferențială omogenă $y' = \frac{x-y}{x+y}$
şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=0, y_0=1.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda aproximațiilor succesive a lui Piccard pe intervalul [x_0 , x_0 +1].

2. Metoda Euler

Problemă Fie ecuația diferențială omogenă $3xyy' = x^2 + y^2$ xy>0 şi punctul M(x_0 , y_0), unde x_0 =1, y_0 =1.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Euler pe intervalul [1, 2].

Indicație: Ecuația diferențială se rescrie sub forma

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{3xy} \quad , \text{x0 = 1, y0 = 1.}$$

Program

$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{3 \cdot x \cdot y}$ se declara membrul drept al ec. dif. y' = f(x,y)

$x_0 := 1 \quad y_0 := 1$ condițiile inițiale

$a := 1 \quad b := 2$ capetele intervalului

$n := 10$ numarul de intervale echidistante in care se imparte intervalul [a,b]

$h := \frac{b - a}{n}$ pasul, adica lungimea celor n intervale

Metoda Euler de gasire a solutiei:

$i := 0..n$

$x_i := x_0 + i \cdot h$

$$y_{i+1} := y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$$

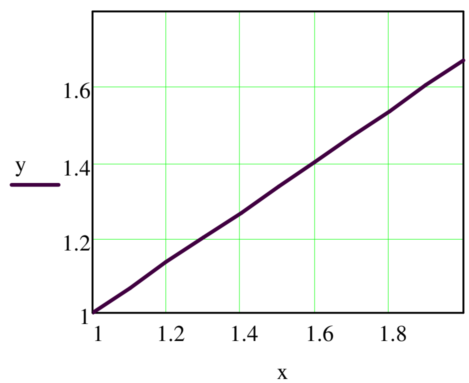
$x =$

	0
0	1
1	1.1
2	1.2
3	1.3
4	1.4
5	1.5
6	1.6
7	1.7
8	1.8
9	1.9
10	2

$y =$

	0
0	1
1	1.067
2	1.133
3	1.2
4	1.267
5	1.334
6	1.401
7	1.468
8	1.536
9	1.603
10	1.671
11	1.739

Reprezentarea grafică a soluției:



Aplicații:

1. Fie ecuația diferențială omogenă $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

şi punctul M(x_0, y_0), unde $x_0 = 1$, $y_0 =$ e.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Euler pe intervalul [1, 2].

2. Fie ecuația diferențială cu variabile separabile $y' = \dfrac{e^x}{y(1+e^x)}$

şi punctul M(x_0, y_0), unde $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Euler pe intervalul [0, 2].

3. Fie ecuația diferențială cu variabile separabile $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$

şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=2, y_0=2.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Euler pe intervalul [2, 4].

4. Fie ecuația diferențială liniară $y' = y\sin x + 2x$

şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=0, y_0=0.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Euler pe intervalul [1, 2].

3. <u>Metoda</u> <u>Runge-Kutta</u> <u>de</u> <u>ordinul</u> <u>4</u>

Problemă Fie ecuația diferențială cu variabile separabile $xy' + y = y^2 \ln x$
şi punctul M(x_0, y_0), unde x_0=1, y_0=1.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.
Să se determine soluția aproximativă prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4 pe intervalul [1, 2].
Reprezentare grafică a soluției.

Indicație: Ecuația diferențială se rescrie sub forma

$$y' = \frac{y^2 \ln(x) - y}{x}, \ x0 = 1, \ y0 = 1.$$

Program

$f(x,y) := \frac{y^2 \cdot \ln(x) - y}{x}$ se declara membrul drept al ec. dif. y' = f(x,y)

$x_0 := 1 \quad y_0 := 1$ condițiile inițiale

$a := 1 \quad b := 2$ capetele intervalului

$n := 10$ numarul de intervale echidistante in care se imparte intervalul [a,b]

$h := \frac{b-a}{n}$ pasul, adica lungimea celor n intervale

Metoda Runge-Kutta de ordinul 4:

$i := 0..n$

$x_i := x_0 + i \cdot h$

$k1(x,y) := h \cdot f(x,y)$

$$k2(x,y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k1(x,y)}{2}\right)$$

$$k3(x,y) := h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k2(x,y)}{2}\right)$$

$k4(x,y) := h \cdot f(x + h, y + k3(x,y))$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{1}{6}\cdot\left(k1\left(x_i, y_i\right) + 2\cdot k2\left(x_i, y_i\right) + 2\cdot k3\left(x_i, y_i\right) + k4\left(x_i, y_i\right)\right)$$

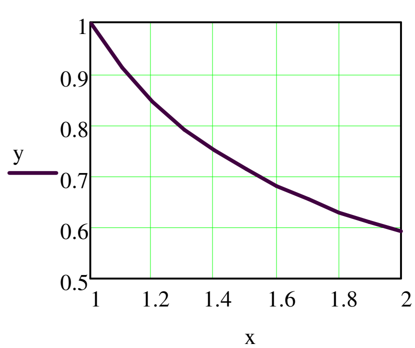
x =

	0
0	1
1	1.1
2	1.2
3	1.3
4	1.4
5	1.5
6	1.6
7	1.7
8	1.8
9	1.9
10	2

y =

	0
0	1
1	0.913
2	0.846
3	0.792
4	0.748
5	0.712
6	0.68
7	0.653
8	0.63
9	0.609
10	0.591
11	0.574

Reprezentarea grafică a soluției:



Aplicații:

1. Fie ecuația diferențială cu variabile separabile $xy' + y = y^2 \ln x$ şi punctul M(x_0, y_0), unde $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4 pe intervalul [1, 2].

2. Fie ecuația diferențială omogenă $y' = \dfrac{x + 2y}{4x - y}$ şi punctul M(x_0, y_0), unde $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4 pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

3. Fie ecuația diferențială liniară $y' = 2\dfrac{y}{x} + x^3$ şi punctul M(x_0, y_0), unde $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Să se determine analitic soluția care satisface problema lui Cauchy.

Să se determine soluția aproximativă prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4 pe intervalul [1, 3].