LABORATOR 7

APROXIMAREA INTEGRALELOR DEFINITE

1. Metoda dreptunghiurilor

Problemă. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_2^4 x^2 dx$ să fie aproximată prin metoda dreptunghiurilor cu eroarea $\varepsilon = 10^{-1}$

$$\left(\frac{M'(b-a)^2}{n} < \varepsilon \right)$$

Rezolvare: Vom determina numărul optim de intervale.

$f(x) = x^2$, $x \in [2, 4]$ $\quad M' = \sup_{2 \le x \le 4} |f'(x)| = \sup_{2 \le x \le 4} |2x| = 8$

$$\Rightarrow \frac{8(4-2)^2}{n} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{32}{n} < \frac{1}{10} \Rightarrow n > 320$$

Program

$ORIGIN \equiv 1$

$a := 2$

$b := 4$

$f(x) := x^2$

$i := 1 .. n-1$

$x_i := a + \frac{b-a}{n} \cdot i$

$I1 := \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$

$I1 = 18.629$

$$I2 := \frac{b-a}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

$$I2 = 18.704$$

Verificare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 18.667$$

Aplicații.

1. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^2 \ln x dx$ să fie aproximată prin metoda dreptunghiurilor cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\left(\frac{M^{'}(b-a)^2}{n} < \varepsilon\right)$$

2. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + 3x + 2)dx$ să fie aproximată prin metoda dreptunghiurilor cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$ $\left(\frac{M^{'}(b-a)^2}{n} < \varepsilon\right)$

3. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$ să fie aproximată prin metoda dreptunghiurilor cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\left(\frac{M^{'}(b-a)^2}{n} < \varepsilon\right)$$

2. Metoda trapezelor

Problemă. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^2 x^3 dx$ să fie aproximată prin metoda trapezelor cu eroarea $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\left(\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon \right)$$

Rezolvare: Vom determina numărul optim de intervale.

$f(x) = x^3$, $x \in [1, 2]$ $M'' = \sup_{1 \le x \le 2} |f''(x)| = \sup_{1 \le x \le 2} |6x| = 12$

$$\Rightarrow \frac{12(2-1)^3}{12n^2} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow n > 10^2$$

Program

$ORIGIN \equiv 1$

$a := 1$

$b := 2$

$f(x) := x^3$

$i := 1 .. n-1$

$$x_i := a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

$$I := \frac{b-a}{2n} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \right]$$

$I = 3.75$

Verificare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 3.75$$

Aplicații.

1. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^2 (x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$ să fie aproximată prin metoda trapezelor cu eroarea ε = 10^{-4} $\left(\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon \right)$

2. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^3 \ln x dx$ să fie aproximată prin metoda trapezelor cu eroarea ε = 10^{-2} $\left(\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon \right)$

3. Să se determine numărul de intervale n astfel încât integrala $I = \int_1^2 (2x^3 - 6x^2 + 4x + 9)dx$ să fie aproximată prin metoda trapezelor cu eroarea ε = 10^{-4} $\left(\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon \right)$

3. Aproximarea prin interpolare

Problemă. Fie funcția $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ şi următoarele ei noduri:

x	0	1	2
f(x)	1	0.5	0.2

Să se aproximeze funcția prin polinomul de interpolare Lagrange L(x) şi să se calculeze $\int_0^2 L(x)dx$ cu metoda dreptunghiurilor considerând n = 100 intervale echidistante.

Program

$ORIGIN \equiv 1$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$i := 1 .. 3$

Aproximarea funcției prin polinomul de interpolare Lagrange

$$P1(t) := \frac{t - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{t - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$P2(t) := \frac{t - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{t - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$P3(t) := \frac{t - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{t - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$L(t) := y_1 \cdot P1(t) + y_2 \cdot P2(t) + y_3 \cdot P3(t)$$

Calculul integralei cu metoda dreptunghiurilor

$a := 2$

$b := 4$

$n := 100$

$i := 1 .. n - 1$

$$t_i := a + \frac{b - a}{n} \cdot i$$

$$I1 := \frac{b - a}{n} \cdot \left(L(a) + \sum_{i=1}^{n-1} L(t_i) \right)$$

$I1 = 0.267$

$$I2 := \frac{b - a}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} L(t_i) + L(b) \right)$$

$I2 = 0.267$

Verificare:

$$\int_a^b \frac{1}{1 + x^2} \, dx = 0.219$$

Aplicații.

1. Fie funcția $f(x) = e^{-x}$ şi următoarele ei noduri:

x	0	1	2
f(x)	1	0.37	0.13

Să se aproximeze funcția prin polinomul de interpolare Lagrange L(x) şi să se calculeze $\int_0^2 L(x)dx$ cu metoda dreptunghiurilor considerând n = 100 intervale echidistante.

2. Fie funcția $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ şi următoarele ei noduri:

x	-1	1	2
f(x)	-0.5	0.5	0.4

Să se aproximeze funcția prin polinomul de interpolare Lagrange L(x) şi să se calculeze $\int_{-1}^2 L(x)dx$ cu metoda trapezelor considerând n = 100 intervale echidistante.

3. Fie funcția $f(x) = e^{-x^2}$ şi următoarele ei noduri:

x	-1	0	1
f(x)	0.37	1	0.37

Să se aproximeze funcția prin polinomul de interpolare Lagrange L(x) şi să se calculeze $\int_{-1}^1 L(x)dx$ cu metoda trapezelor considerând n = 100 intervale echidistante.