LABORATOR 6

METODE NUMERICE PENTRU INTERPOLARE

Problema interpolării: Se dă intervalul [a, b] care conține n valori distincte $x_1, \dots x_n$, numite *noduri*.

Se cunosc, din procese experimentale, valorile unei funcții $f : [a, b] \to R$ în nodurile $x_1, \dots x_n$, adică se cunosc numerele $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots n$. În acest caz funcția f este dată de tabela:

x	x_1	x_2	…	x_n
f(x)	y_1	y_2	…	y_n

Cum nu se cunoaşte expresia lui f(x) se cere să se caluleze valoarea lui f într-un punct $z \neq x_i$, $i = 1, \dots n$, fiind necesară exprimarea aproximativă a funcției prin expresii polinomiale.

1. Interpolare prin polinoame liniare pe porțiuni

Fie $\Delta : x_1 < x_2 < \dots < x_n$ o diviziune a intervalului $[x_1, x_n]$ şi $y_1, \dots y_n$, sunt n numere reale. Se introduc polinoamele de gradul întâi $\ell_1(x)$, $\ell_I(x)$ pentru $i = 2, \dots n-1$ şi $\ell_n(x)$ în felul următor

$$\ell_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, & x_1 \le x \le x_2 \\ 0, & x_2 < x \le x_n \end{cases}$$

$$\ell_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} < x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & x_1 \le x \le x_{i-1},\ sau\ x_{i+1} < x \le x_n \end{cases}$$

$$\ell_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 0, & x_1 \le x \le x_{n-1} \end{cases}$$

Cu ajutorul acestor funcții construim funcția liniară pe porțiuni

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \ell_i(x) .$$

Problemă. Să se determine funcția de interpolare liniară pe porțiuni corespunzătoare nodurilor

x	0	1/3	2/3	1
y	1	2	0	2

în punctul x = 0.5

Program

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

$a := 0.5$ punctul de interpolare

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$n := 4$ numărul perechilor de puncte

$$l1(t) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{x_2 - t}{x_2 - x_1} \ \text{ if } \ x_1 \le t \le x_2 \\ 0 \ \text{ if } \ x_2 < t \le x_4 \end{array} \right.$$

$l1(a) = 0$

$$l2(t) := \left| \begin{array}{l} \dfrac{t - x_1}{x_2 - x_1} \ \text{ if } \ x_1 < t \le x_2 \\ \dfrac{x_3 - t}{x_3 - x_2} \ \text{ if } \ x_2 < t \le x_3 \\ 0 \ \text{ if } \ x_3 < t \le x_4 \end{array} \right.$$

$l2(a) = 0.5$

$$l3(t) := \begin{vmatrix} \dfrac{t - x_2}{x_2 - x_1} \;\text{ if }\; x_2 < t \le x_3 \\ \dfrac{x_4 - t}{x_4 - x_3} \;\text{ if }\; x_3 < t \le x_4 \\ 0 \;\text{ if }\; (x_1 \le t \le x_2) \end{vmatrix}$$

$l3(a) = 0.5$

$$l4(t) := \begin{vmatrix} \dfrac{t - x_3}{x_4 - x_3} \;\text{ if }\; x_3 < t \le x_4 \\ 0 \;\text{ if }\; x_1 \le t \le x_3 \end{vmatrix}$$

$l4(a) = 0$

Funcția liniară pe porțiuni

$f := y_1 \cdot l1(a) + y_2 \cdot l2(a) + y_3 \cdot l3(a) + y_4 \cdot l4(a)$

$f = 1$

Aplicații. Să se determine funcțiile de interpolare liniară pe porțiuni corespunzătoare nodurilor:

a)

x	0	0.25	0.79	1
y	2	3	0	1

în punctul x = 0.6

b)

x	0.3	1.05	1.9
y	-2	1	0.99

în punctul x = 1.3

2. Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Se consideră funcția f:[a, b] → R şi n+1 noduri x_0 , x_1 , …x_n nu neaparat echidistante, dar distincte. Se cunosc $f(x_i) = y_i$, i = 0, 1, …n.

Funcția f se aproximează cu un polinom de gradul n, construit în felul următor.

Se consideră polinoamele de gradul n

$$P_i(x) = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \ldots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

i = 0, 1, ….n

Cu ajutorul acestor polinoame se construieşte polinomul de interpolare al lui Lagrange

$$P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) +\ldots+ y_iP_i(x) + \ldots+ y_nP_n(x)$$

Problemă. Fiind dată funcția y = f(x) prin tabela următoare, să se calculeze f(29).

x	-5	-2	7	11	30
y	-3	0	9	13	32

Program varianta 1

ORIGIN ≡ 1

$$x := \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix}$$

n := 5

a := 29

$$P1(t) := \frac{t - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{t - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{t - x_4}{x_1 - x_4} \cdot \frac{t - x_5}{x_1 - x_5}$$

$$P1(t) \to \left(\frac{t}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{t}{12}-\frac{7}{12}\right)\cdot\left(\frac{t}{16}-\frac{11}{16}\right)\cdot\left(\frac{t}{35}-\frac{6}{7}\right)$$

$$P1(t) \text{ expand } \to \frac{t^4}{20160}-\frac{23\cdot t^3}{10080}+\frac{521\cdot t^2}{20160}-\frac{269\cdot t}{5040}-\frac{11}{48}$$

$$P2(t) := \frac{t-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{t-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{t-x_4}{x_2-x_4}\cdot\frac{t-x_5}{x_2-x_5}$$

$$P2(t) \to -\left(\frac{t}{3}+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{t}{9}-\frac{7}{9}\right)\cdot\left(\frac{t}{13}-\frac{11}{13}\right)\cdot\left(\frac{t}{32}-\frac{15}{16}\right)$$

$$P2(t) \text{ expand } \to \frac{43\cdot t^3}{11232}-\frac{t^4}{11232}-\frac{29\cdot t^2}{864}-\frac{775\cdot t}{11232}+\frac{1925}{1872}$$

$$P3(t) := \frac{t-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{t-x_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{t-x_4}{x_3-x_4}\cdot\frac{t-x_5}{x_3-x_5}$$

$$P3(t) \to \left(\frac{t}{4}-\frac{11}{4}\right)\cdot\left(\frac{t}{9}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{t}{12}+\frac{5}{12}\right)\cdot\left(\frac{t}{23}-\frac{30}{23}\right)$$

$$P3(t) \text{ expand } \to \frac{t^4}{9936}-\frac{17\cdot t^3}{4968}+\frac{53\cdot t^2}{9936}+\frac{475\cdot t}{2484}+\frac{275}{828}$$

$$P4(t) := \frac{t-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{t-x_2}{x_4-x_2}\cdot\frac{t-x_3}{x_4-x_3}\cdot\frac{t-x_5}{x_4-x_5}$$

$$P4(t) \to -\left(\frac{t}{4}-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{t}{13}+\frac{2}{13}\right)\cdot\left(\frac{t}{16}+\frac{5}{16}\right)\cdot\left(\frac{t}{19}-\frac{30}{19}\right)$$

$$P4(t) \text{ expand } \to \frac{15\cdot t^3}{7904}-\frac{t^4}{15808}+\frac{3\cdot t^2}{1216}-\frac{275\cdot t}{3952}-\frac{525}{3952}$$

$$P5(t) := \frac{t-x_1}{x_5-x_1}\cdot\frac{t-x_2}{x_5-x_2}\cdot\frac{t-x_3}{x_5-x_3}\cdot\frac{t-x_4}{x_5-x_4}$$

$$P5(t) \to \left(\frac{t}{35}+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{t}{19}-\frac{11}{19}\right)\cdot\left(\frac{t}{32}+\frac{1}{16}\right)\cdot\left(\frac{t}{23}-\frac{7}{23}\right)$$

$$P5(t) \text{ expand } \to \frac{t^4}{489440}-\frac{11\cdot t^3}{489440}-\frac{39\cdot t^2}{489440}+\frac{359\cdot t}{489440}+\frac{11}{6992}$$

$$L(t) := y_1\cdot P1(t)+y_2\cdot P2(t)+y_3\cdot P3(t)+y_4\cdot P4(t)+y_5\cdot P5(t)$$

$$L(t) \text{ expand } \to t+2$$

$$L(a) = 31$$

Varianta 2

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

$$x := \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ 13 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$n := 5$

$a := 29$

$i := 1 .. n$

$j := 1 .. n$

$$P_i := \prod_j \left(\mathrm{if}\left(j \neq i, \frac{a - x_j}{x_i - x_j}, 1 \right) \right)$$

$$L := \sum_i \left(y_i \cdot P_i \right)$$

$L = 31$

Aplicații: Utilizând polinomul de interpolare Lagrange să se calculeze valorile funcțiilor în punctele specificate

a)

x	-11	-9	1	2	6	8
y	2	7	**?**	9	-3	-4

c)

x	-2.5	-1.7	1	3	4.5	5
y	11	9	-2	-1	**?**	3

b)

x	-3.2	-1.5	4	5.5	11.2	20
y	-5	-4	2	2.5	3.8	**?**

d)

x	-6	-4	2	8	25
y	3.4	2.3	-2.5	-4	**?**